Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.
- (b) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Platzaufgabe 6 Wir betrachten die Parametrisierung

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, \varphi) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \sin(\varphi) \\ u^2 \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Diese beschreibt die Rotationsfläche, die durch Rotation der Kurve $x_3 = x_1^2$ in der x_1 - x_3 -Ebene um die x_1 -Achse entsteht.

- (a) Bestimmen Sie dafür die Größen E , F und G .
- (b) Sei $J = [0, 1] \times [0, \pi]$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $\Phi(J)$ mittels (a). Das resultierende Integral über u braucht dabei nicht ausgewertet zu werden.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 02.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 02.12.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.
- (b) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.
- (c) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Hausaufgabe 6 Wir betrachten die Parametrisierung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix} .$$

Diese beschreibt den Graphen der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

- (a) Bestimmen Sie E , F und G .
- (b) Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $C := \Phi \circ c$.

Verwenden Sie (a), um die Länge der Kurve $C([0, 1])$ zu bestimmen. Das resultierende Integral über t braucht dabei nicht ausgewertet zu werden.