Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 4

Platzaufgaben

Platzaufgabe 7 Wir parametrisieren den durch $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ und $x_3 \geqslant 0$ beschriebenen Kegel mittels

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{z}{\varphi} \;\mapsto\; \Phi(z, \varphi) \;=\; \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \;.$$

(a) Sei $c(t) = \binom{t}{0}$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
Sei $d(t) = \binom{2}{t}$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
Skizzieren Sie die von C und von D parametrisierten Kurven.

(b) Bestimmen Sie $t_1 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.

(c) Bestimmen Sie $E = E(z, \varphi)$, $F = F(z, \varphi)$ und $G = G(z, \varphi)$.

(d) Berechnen Sie unter Verwendung von $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.
Bestimmen Sie hieraus diesen Winkel. Vergleichen Sie mit der Skizze.

Platzaufgabe 8

(a) Man parametrisiere die x_1-x_2-Ebene auf einfachst mögliche Weise.

(b) Man bestimme E, F und G.

(c) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für i, j, $k \in \{1, 2\}$ mittels E, F und G.

(d) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 4

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 09.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 09.12.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 7 Wir betrachten den Zylinder $Z = \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4 \}$, parametrisiert durch

$$\Phi \;:\; \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix} z \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(z, \varphi) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ z \end{smallmatrix}\right) \;.$$

(a) Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
Sei $d(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
Bestimmen Sie $t_1,\, t_2 \,\in\, [0, 2\pi]$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.

(b) Bestimmen Sie E, F und G.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung von $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.

Hausaufgabe 8

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$, wobei $u,\, v \,\in\, \mathbb{R}$.
Vgl. Hausaufgabe 6.

Man skizziere die Schnitte der parametrisierten Fläche mit den Koordinatenebenen und mit den Ebenen $x_1 = x_2$ und $x_1 = -x_2$ in ein Koordinatensystem.

Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert?

(b) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für $i,\, j,\, k \,\in\, \{1, 2\}$ mittels E, F und G.

(c) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.