Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 5

Platzaufgaben

Platzaufgabe 9

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ der x_1-x_2-Ebene S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.
Sei $c(t) = \binom{t}{0}$, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(1) Rechnen Sie nach: $\Phi(c(t))$ parametrisiert eine Gerade in S.

(2) Rechnen Sie nach: $\Phi(c(t))$ parametrisiert eine Geodäte in der Ebene S.

Platzaufgabe 10

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ der x_1-x_2-Ebene S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.
Sei $c(t) = \binom{t}{t^2}$, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(1) Skizzieren Sie die von $\Phi(c(t))$ parametrisierte Kurve.

(2) Rechnen Sie nach: $\Phi(c(t))$ parametrisiert keine Geodäte in der Ebene S.

(3) Welchen Winkel schließen Normalenvektor der Ebene und Normalenvektor der Kurve ein?
Begründen Sie damit erneut: $\Phi(c(t))$ parametrisiert keine Geodäte in der Ebene S.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 5

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 16.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 16.12.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 9 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Sei $c(t) = \binom{t}{t}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf S?

(b) Sei $d(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(d(t))$ eine Geodäte auf S?

Hausaufgabe 10 Sei $a \in (0,1]$ ein Parameter. Wir betrachten die um den Faktor a abgeplattete Kugel S, welche ein Ellipsoid ist und welche durch

$$\Phi \;:\; [0,\pi] \times [0,2\pi] \;\mapsto\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{\vartheta}{\varphi} \mapsto \Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

parametrisiert wird. Es ist also $S := \Phi([0,\pi] \times [0,2\pi])$.

(a) Bestimmen Sie E, F und G.

(b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole.

(c) Sei $c(t) = \binom{t}{0}$, wobei $t \in [0,\pi]$.
Anschaulich gesprochen parametrisiert $\Phi(c(t))$ einen "Längenhalbkreis" auf S.
Parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf S?