

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 13 Sei $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $s \in [0, 2\pi]$.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

(b) Man bestimme $\kappa \cdot \cos(\nu)$. Man bestimme ν .

Man vergleiche mit dem Wert von ν aus einer direkten geometrischen Überlegung.

Platzaufgabe 14

Sei, wie in Platzaufgabe 12,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

(b) Sei $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

An der Stelle t bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 20.01.25 in den Gruppenübungen oder bis Mo 20.01.25, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 13

Sei, wie in den Platzaufgaben 12 und 14,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man gebe $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ an.

(b) Sei $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

An der Stelle $t \in \mathbb{R}$ bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa \cdot \cos(\nu) = \kappa(t) \cdot \cos(\nu(t))$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa = \kappa(t)$ für $C(t) := \Phi(c(t))$.

Man verwende dies und das Ergebnis aus (b), um $\cos(\nu(t))$ zu berechnen.

Hausaufgabe 14 Sei $a \in (0, 1)$ ein Parameter. Wir betrachten wieder die um den Faktor a abgeplattete Kugel S aus Hausaufgabe 10, welche ein Ellipsoid ist und welche durch

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ a \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

parametrisiert wird. Es ist also $S := \Phi([0, \pi] \times [0, 2\pi])$. Vgl. auch Hausaufgabe 12.

(a) Man gebe $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ an.

(b) Sei $c(t) = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

An der Stelle $t \in [0, 2\pi]$ bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa \cdot \cos(\nu) = \kappa(t) \cdot \cos(\nu(t))$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa = \kappa(t)$ für $C(t) := \Phi(c(t))$.

Man verwende dies und das Ergebnis aus (b), um $\cos(\nu(t))$ zu berechnen.