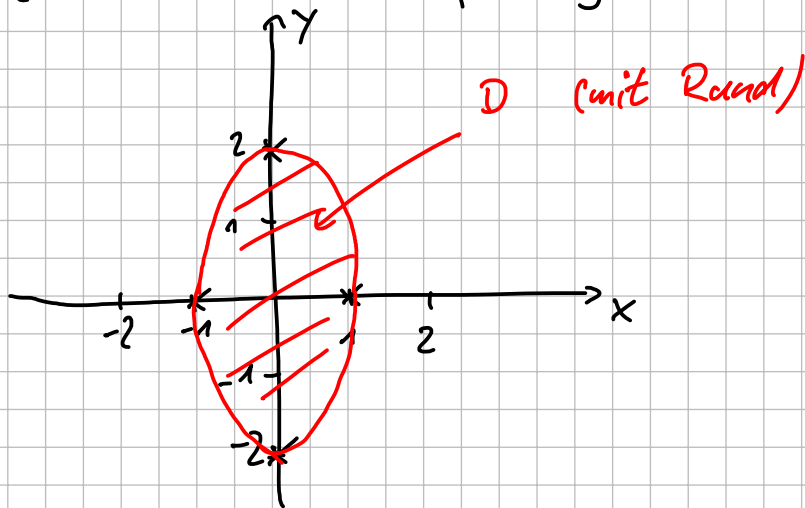


Vortragsübung 1

Aufgabe 1:

$$(a) \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$



(b) D als Normalbereich bzgl. x -Achse:

$$\text{Allgemeine Formel: } D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$$

Siehe Skizze: $a = -1$, $b = 1$

Bestimme g und h :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} \leq 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 4 \cdot (1 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{4(1-x^2)} = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$g(x) = -2\sqrt{1-x^2}, \quad h(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

Damit:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -2\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2} \right\}$$

Normalbereich bzgl. y -Achse:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \right\}$$

$$a = -2, \quad b = 2 \quad (\text{Siehe Skizze})$$

Löse nun nach x auf (statt y):

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

$$g(y) = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \quad h(y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \leq x \leq \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \right\}$$

(c) Integriere $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ über D :

Nutze Normalbereich nach y : Mit Satz 1.3.4 gilt:

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2} \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \underbrace{\int_{-\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}} \sqrt{1 - x^2} \, dx}_{\text{Nervig zu rechnen ...}} \, dy$$

Nervig zu rechnen ...

Leichter: Normalbereich nach x :

$$\iint_D \sqrt{1-x^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{konst. in } y} dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\sqrt{1-x^2} y \right]_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \left(2\sqrt{1-x^2} - (-2\sqrt{1-x^2}) \right) dx$$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 4 \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-1}^1$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) \right) = 4 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

(d) Integriere $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x) \cdot y^2$ über D :

Nutze Normalbereich nach x :

$$\iint_D \sin(x) y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \sin(x) y^2 dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\sin(x) \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{4}{3} \sin(x) \sqrt{1-x^2}^3 dx$$

Stammfunktion super schwierig

Nutze einfacher Normalbereich nach y :

$$\iint_D \sin(x) y^2 dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \sin(x) y^2 dx dy$$

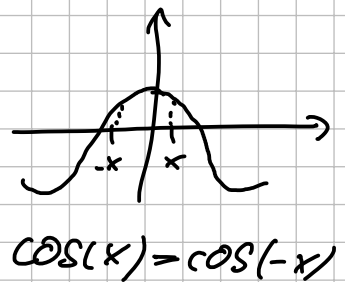
$$= \int_{-2}^2 \left[-\cos(x) y^2 \right]_{x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} dy$$

$$= \int_{-2}^2 y^2 \left(-\cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) + \cos\left(-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) \right) dy$$

$$= \int_{-2}^2 y^2 \underbrace{\left(-\cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) + \cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) \right)}_{=0} dy$$

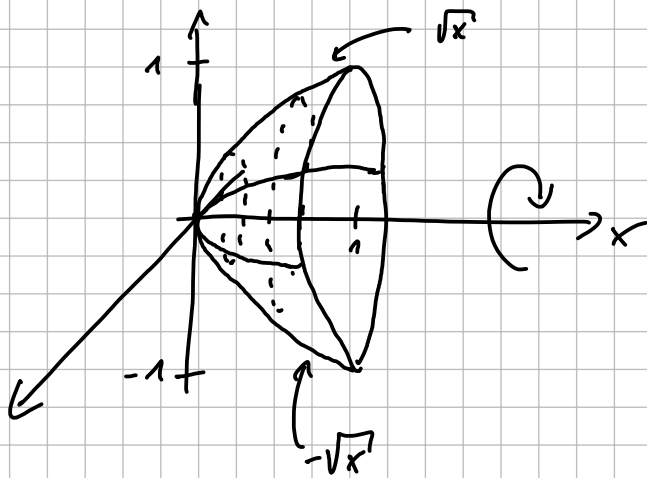
$$= \int_{-2}^2 y^2 \cdot 0 dy$$

$$= 0$$



Aufgabe 2:

(a) Drehkörper zu $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$



(b) Volumen des Drehkörpers von (a):

$$V = \pi \int_a^b r(x)^2 dx$$

Hier: $a=0$ $b=1$, $r(x)=\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \sqrt{x}^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(c) Volumen des Drehkörpers zu

$$g_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha \quad \text{wobei } \alpha > 0$$

(Spezialfall $\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt (a))

$$V = \pi \int_0^1 g_\alpha(x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^\alpha)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^{2\alpha} dx = \pi \left[\frac{1}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1} \right]_{x=0}^1$$

$$= \pi \frac{1}{2\alpha+1} \left(1^{2\alpha+1} - 0^{2\alpha+1} \right) = \pi \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{\pi}{2\alpha+1}$$

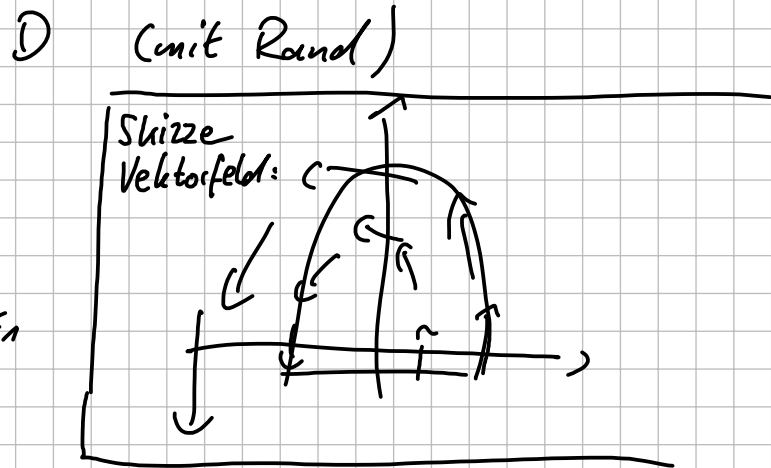
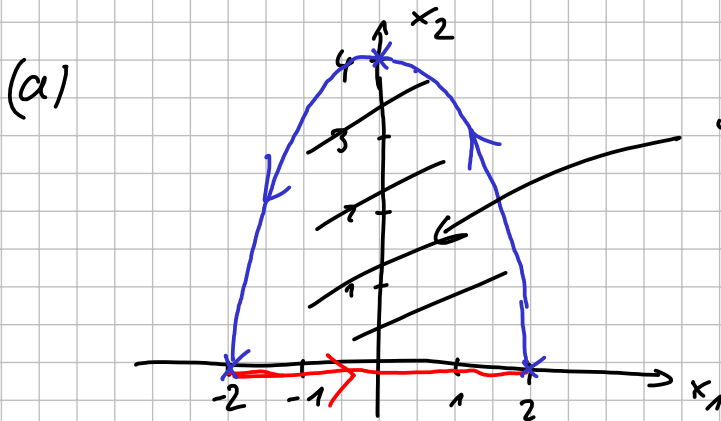
Probe. Setze $\alpha = \frac{1}{2}$: $V = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{\pi}{2}$

Stimmt mit (b) überein \leadsto Probe \checkmark

Aufgabe 3:

$$\text{Vektorfeld auf } \mathbb{R}^2: g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4 - x_1^2 \right\}$$



(b) **Unteren Randstück:**

$$c_1: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, c_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

oberes Randstück:

$$c_2: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, c_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 4 - (-t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}$$

(c) Berechne Zirkulation $Z(g, K)$

Dazu zu $c_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Mit Def. 1.5.1 gilt:

$$Z(g, k) = \int_{-2}^2 g(c_1(t)) \cdot c_1'(t) dt + \int_{-2}^2 g(c_2(t)) \cdot c_2'(t) dt$$

$$= \int_{-2}^2 g\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-2}^2 g\left(\begin{pmatrix} -t \\ 4-t^2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-2}^2 \begin{pmatrix} -(k-t^2) \\ -3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^2 0 + 0 dt + \int_{-2}^2 4-t^2 + 6t^2 dt$$

$$= 0 + \int_{-2}^2 4 + 5t^2 dt$$

$$= \left[4t + \frac{5}{3} t^3 \right]_{t=-2}^2$$

$$= 8 + \frac{5 \cdot 8}{3} + 8 + \frac{5 \cdot 8}{3}$$

$$= \frac{8 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 8}{3}$$

$$= \frac{128}{3} \quad (*)$$

Berechne

$$\iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2 \quad :$$

$$\text{Zunächst: } \operatorname{rot} g = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 3 - (-1) = 4$$

Also:

$$\iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D 4 \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x_1^2} 4 \, dx_2 \, dx_1 = \int_{-2}^2 \left[4x_2 \right]_{x_2=0}^{4-x_1^2} dx_1$$

$$= \int_{-2}^2 4 \cdot (4-x_1^2) - 4 \cdot 0 \, dx_1$$

$$= 4 \int_{-2}^2 (4-x_1^2) \, dx_1 = 4 \cdot \left[4x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 \right]_{x_1=-2}^2$$

$$= 4 \cdot \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} (-2)^3 \right) \right)$$

$$= 4 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot 3}{3} - \frac{16}{3} \right)$$

$$= \frac{4 \cdot 2 \cdot 16}{3} = \frac{128}{3} \quad (**)$$

Probe:

Satz von Green (Satz 1.5-2)

$$\frac{128}{3} \stackrel{(*)}{=} \iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2 \stackrel{\downarrow}{=} Z(g, K) \stackrel{(*)}{=} \frac{128}{3}$$

Probe OK ✓