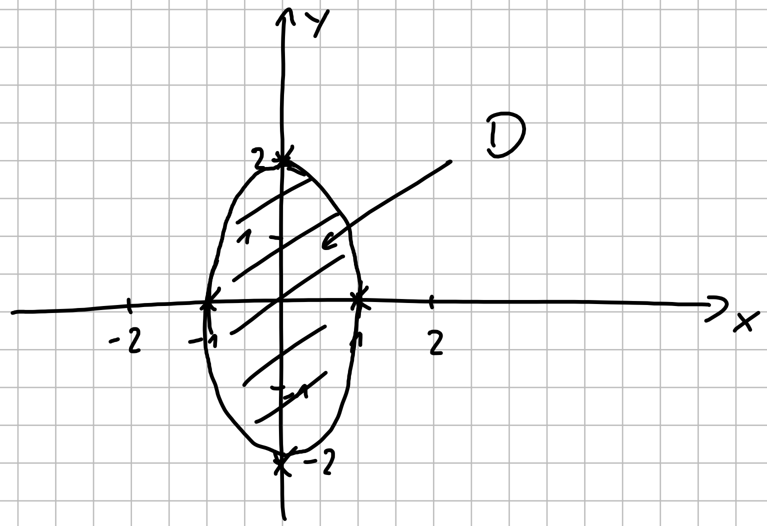
Vortragsübung 1

Aufgabe 1

(a)

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$



(b) D als Normalbereich bzgl. x

allgemeine Formel (Def. 1.3.1)

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\; g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$$

$a = -1$, $b = 1$ (siehe Skizze)

Für g und h: Löse nach y auf

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \iff \frac{y^2}{4} \leq 1 - x^2$$

$$\iff y^2 \leq 4(1-x^2)$$

$$\iff |y| \leq \sqrt{4(1-x^2)} = 2\sqrt{1-x^2}$$

Also: $h(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ $\quad g(x) = -2\sqrt{1-x^2}$

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1,\ -2\sqrt{1-x^2} \le y \le 2\sqrt{1-x^2} \right\}$$

Normalbereich bzgl y:

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \right\}$$

$a = -2 \qquad b = 2$

Löse nach x auf:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \iff x^2 \le 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$\iff |x| \le \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

Also $g(y) = -\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} \qquad h(y) = \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \le y \le 2,\ -\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} \le x \le \sqrt{1-\frac{y^2}{4}} \right\}$$

(c) Integriere $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ über D

Nutze Normalbereich nach x (Satz 1.3.4)

$$\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \underbrace{\int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \sqrt{1-x^2}\, dx}_{\text{schwierig} \ldots}\, dy$$

Alternative:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{konst. in } y}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sqrt{1-x^2}\,y\right]_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(2\sqrt{1-x^2} - \left(-2\sqrt{1-x^2}\right)\right) dx$$

$$= 4\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx$$

$$= 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{1}$$

$$= 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) = 4\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

(d) Integriere $g(x,y) = \sin(x)\,y^2$ über D

Nutze Normalbereich bzgl. x

$$\iint_D \sin(x)\,y^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \sin(x)\,y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sin(x)\,\frac{1}{3}\,y^3\right]_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}\sin(x)\,\sqrt{1-x^2}^{\,3}\,dx$$

Stammfunktion sehr schwer ...

Nutze Normalbereich nach y:

$$\iint_D \sin(x)\, y^2 \, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \sin(x)\, y^2 \, dx\, dy$$

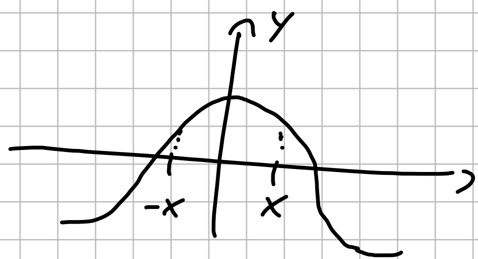
$$= \int_{-2}^{2} \Big[-\cos(x)\, y^2 \Big]_{x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2 \left(-\cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) + \cos\left(-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)\right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2 \underbrace{\left(-\cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right) + \cos\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)\right)}_{=0} dy$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2 \cdot 0 \, dy$$

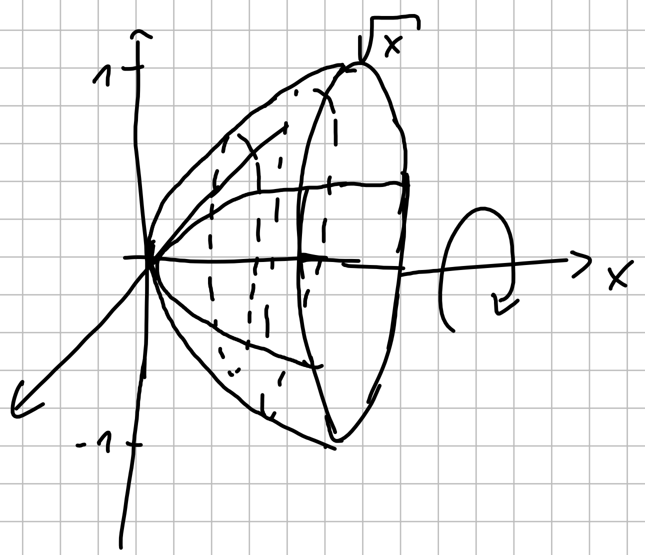
$$= 0$$



$\cos(x) = \cos(-x)$

Aufgabe 2:

(a) Drehkörper zu $f: [0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$



(b) Berechne Volumen, siehe Bsp. 1.3.6 + folgende Folie:

$$V = \pi \int_a^b r(x)^2 \, dx$$

Hier ergibt sich: $a = 0$, $b = 1$ $r(x) = \sqrt{x}$

$$V = \pi \int_0^1 \sqrt{x}^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^1 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(c) Volumen des Drehkörpers zu

$$g_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto x^\alpha$$

wobei $\alpha > 0$.

Anmerkung: Das ist eine Verallgemeinerung von (b), da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$V = \pi \int_0^1 g_\alpha(x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (x^\alpha)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^{2\alpha} \, dx = \pi \left[\frac{1}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1} \right]_{x=0}^1$$

$$= \pi \frac{1}{2\alpha+1} \left(1^{2\alpha+1} - 0^{2\alpha+1} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha+1}$$

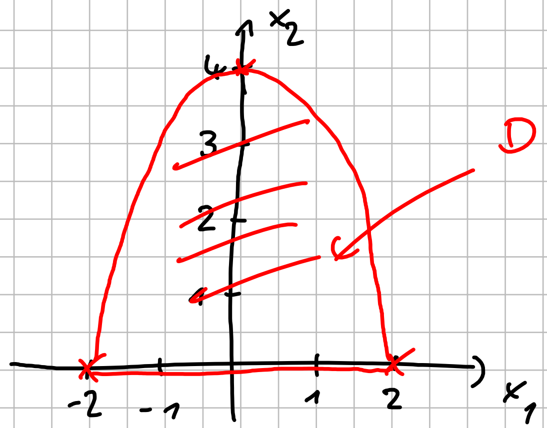
Probe: $\alpha = \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 3:

Vektorfeld $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$ auf

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 4 - x_1^2 \right\}$$

(a)



(b) Unteres Randstück:

$$c_1 : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oberes Randstück:

$$c_2 : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} -t \\ 4-(-t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 4-t^2 \end{pmatrix}$$

(c) Berechne Zirkulation:

Berechne zunächst:

$$c_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Nach Def. (Vorlesung 1.5.1):

$$Z(g, K) = \int_K g(x) \cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{2} g(c_1(t)) \cdot c_1'(t)\, dt \quad + \int_{-2}^{2} g(c_2(t)) \cdot c_2'(t)\, dt$$

$$= \int_{-2}^{2} g\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad + \int_{-2}^{2} g\left(\begin{pmatrix} -t \\ 4-t^2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad + \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} -(4-t^2) \\ -3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^{2} 0\, dt \quad + \int_{-2}^{2} 4 - t^2 + 6t^2\, dt$$

$$= 0 \quad + \int_{-2}^{2} 4 + 5t^2\, dt$$

$$= \left[4t + \frac{5}{3} t^3 \right]_{t=-2}^{2}$$

$$= 8 + \frac{5 \cdot 8}{3} - \left(-8 + \frac{5 \cdot (-8)}{3} \right)$$

$$= \frac{8 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 8}{3}$$

$$= \frac{128}{3} \quad *$$

Berechne $\iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2$:

Zunächst: (siehe Vorl. Folie 30)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(g) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$$

$$= 3 - (-1)$$

$$= 4$$

Also:

$$\iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D 4 \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x_1^2} 4 \, dx_2 \, dx_1$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[4 x_2 \right]_{x_2=0}^{4-x_1^2} dx_1$$

$$= \int_{-2}^{2} 4 \cdot (4 - x_1^2) \quad dx_1$$

$$= 4 \int_{-2}^{2} 4 - x_1^2 \, dx_1$$

$$= 4 \cdot \left[4x_1 - \frac{1}{3} x_1^3 \right]_{x_1=-2}^{2}$$

$$= 4 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot 3}{3} - \frac{16}{3} \right)$$

$$= \frac{4 \cdot 2 \cdot 16}{8}$$

$$= \frac{128}{3} \quad (**)$$

Probe:

Satz von Green

$$\frac{128}{3} \overset{(**)}{=} \iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2 \overset{\downarrow}{=} Z(g, K) \overset{(*)}{=} \frac{128}{3}$$

Probe ✓