Vortragsübung 3:

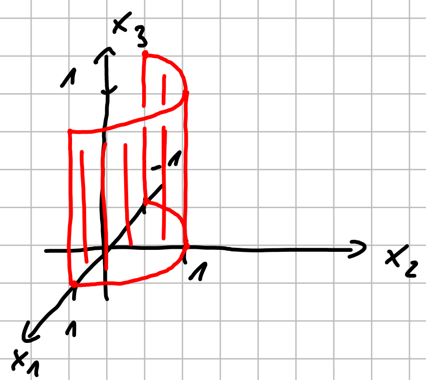
Aufgabe 7:

$$J = [0,1] \times [0,\pi]$$

$$\Phi : J \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

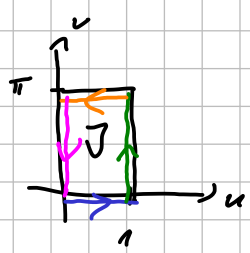
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Skizziere $S = \Phi(J)$:



Halbzylinder ohne Deckel und Boden

(b) Parametrisiere ∂J in pos. Orientierung:



$c_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

$c_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ \pi \end{pmatrix}$

$c_4 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - t \end{pmatrix}$

Bestimme $\Phi \circ c_j$:

$$\bar\Phi \circ c_1(t) = \bar\Phi\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$$

Ableitung: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

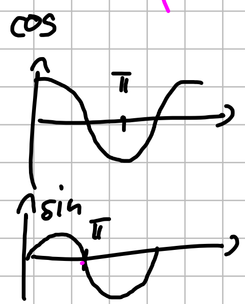
$$\bar\Phi \circ c_2(t) = \bar\Phi\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 1\end{pmatrix}$$

Ableitung: $\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$

$$\bar\Phi \circ c_3(t) = \bar\Phi\begin{pmatrix}1-t\\ \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos \pi\\ \sin \pi\\ 1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1-t\end{pmatrix}$$

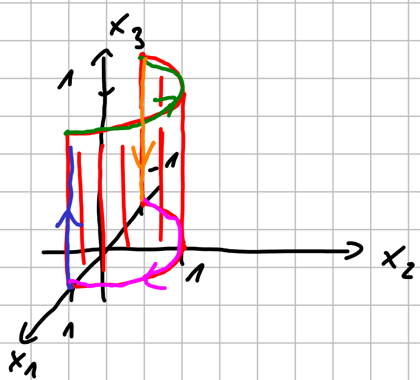
Ableitung: $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\bar\Phi \circ c_4(t) = \bar\Phi\begin{pmatrix}0\\ \pi-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi-t)\\ \sin(\pi-t)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix}$$



Ableitung: $\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$

Skizze:



(c) Berechne $Z(g, \partial S)$:

$$Z(g, \partial S) = \sum_{j=1}^{4} \int_{a_j}^{b_j} g\left(\Phi \circ c_j(t)\right) \cdot \left(\Phi \circ c_j\right)'(t)\, dt$$

Summand für $j=1$:

$$\int_0^1 g\left(\Phi \circ c_1(t)\right) \cdot \left(\Phi \circ c_1\right)'(t)$$

$$= \int_0^1 g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 1\, dt = 1$$

$j=2$: $\displaystyle\int_0^\pi g\left(\Phi \circ c_2(t)\right) \cdot \left(\Phi \circ c_2\right)'(t)\, dt$

$$= \int_0^\pi g\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi 2\sin(t)^2 + 2\cos(t)^2 + 0\, dt$$

$$= \int_0^\pi 2\, dt = 2\pi$$

$j=3$: $\int_0^1 g\left(\Phi \circ c_3(t)\right) \cdot (\Phi \circ c_3)'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 g\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2(1-t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 -1 \, dt = -1$$

$j=4$: $\int_0^\pi g\left(\Phi \circ c_4(t)\right) \cdot (\Phi \circ c_4)'(t)\, dt$

$$= \int_0^\pi g\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi 0 \, dt = 0$$

Zusammen:

$$Z(g, \partial S) = 1 + 2\pi + (-1) + 0 = 2\pi$$

(d) Berechne $\iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO$:

Vorbereitung 1:

$$\operatorname{rot} g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2x_1 \\ -2x_2 - 0 \\ 2x_3 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}$$

Vorbereitung 2:

$$\Phi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO = \iint_J \operatorname{rot} g\,(\Phi(u,v)) \cdot \left(\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\right) du\,dv$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{1} \operatorname{rot} g \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -2\cos v \\ -2\sin v \\ 4u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi} 2\cos(v)^2 + 2\sin(v)^2 + 0 \; du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi 2 \quad du\, dv \quad = \quad 2\pi$$

(e) $2\pi \overset{(c)}{=} Z(g, \partial S) \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO \overset{(d)}{=} 2\pi$

Aufgabe 8:

Gewöhnliche DGL: $y' = (4-3x)y$

Beschreibt „vergiftetes Wachstum"

(a) Alle Lösungen bestimmen:

1. Möglichkeit: Als homogene lineare DGL 1. Ordnung

$$y' \underbrace{-(4-3x)}_{g(x)} y = 0$$

Hat nach 3.3.2 die Lösungen

$$y = f(x) = C \cdot e^{-G(x)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

wobei $G(x)$ Stammfkt. von $g(x) = -(4-3x)$, d.h.

$$G(x) = -4x + \frac{3}{2}x^2$$

Also Lösungen:

$$y = f(x) = C \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2} \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

2. Möglichkeit: Als separierbare DGL

$y = 0$ ist eine Lösung. Für $y \neq 0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = (4-3x)y$$

Trennen: $\frac{dy}{y} = (4-3x)\,dx$

Stammfunktion: $\int \frac{dy}{y} = \int (4-3x)\,dx$

$$\ln|y| = 4x - \frac{3}{2}x^2 + \tilde{C} \quad , \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

Auflösen: $y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{=c} e^{4x - \frac{3}{2}x^2} \quad , \tilde{C} \in \mathbb{R}$

$$y = c\, e^{4x - \frac{3}{2}x^2}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, da $c = 0$ zu $y = 0$ führt, was ebenfalls Lösung der DGL ist.

(b) Anfangswertproblem $y(0) = 5$

Aus (a): $y(x) = c \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2} \quad , c \in \mathbb{R}$

Löse: $5 \overset{!}{=} y(0) = c \cdot e^{4 \cdot 0 - \frac{3}{2} 0^2} = c\, e^0 = c$

Also $c = 5$.

Damit: Lösung des AWP:

$$y(x) = 5 \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2}$$

Aufgabe 9:

Nichthomogene lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + \sin(x)\, y = 4x^3 e^{\cos x} \qquad (*)$$

(a) Bestimme homogene Lösung, d.h. Lösungen f_h von

$$y' + \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\, y = 0$$

Nach 3.3.2 gilt:

$$f_h(x) = C \cdot e^{-G(x)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

wobei $G(x)$ Stammfkt. von $g(x) = \sin x$, also

$$G(x) = -\cos x$$

Also:

$$f_h(x) = C \cdot e^{-G(x)} = C \cdot e^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) Bestimme eine partikuläre Lösung f_p von $(*)$

Dazu wie in 3.3.7:

$$y' + \underbrace{\sin(x)}_{=g(x)}\, y = \underbrace{4x^3 e^{\cos x}}_{u(x)}$$

Nach 3.3.7:

$$f_p(x) = k(x)\, e^{-G(x)}$$

wobei $k(x)$ Stammfkt. von $u(x)\, e^{G(x)} = 4x^3 e^{\cos x}\, e^{-\cos x} = 4x^3$

Also $k(x) = x^4$.

Einsetzen: $f_p(x) = k(x)\, e^{-G(x)} = x^4\, e^{\cos x}$

(c) Bestimme alle Lösungen von (*):

Nach 3.3.8 ist jede Lösung gegeben durch

$$y = f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$\overset{(a),(b)}{=} C \cdot e^{\cos x} + x^4\, e^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= (C + x^4)\, e^{\cos x}$$

(d) Anfangswertproblem: $y(0) = -2$

Mit (c):

$$-2 \overset{!}{=} y(0) = (C + 0^4)\, e^{\cos(0)} = C \cdot e^1 = C \cdot e$$

Auflösen: $-\frac{2}{e} = C$

Also: Lösung des AWP:

$$y(x) = \left(-\frac{2}{e} + x^4\right) e^{\cos x}$$

Bonus: Probe:

Ableiten der Lösung

$$y'(x) = 4x^3 e^{\cos x} + \left(-\frac{2}{e} + x^4\right)(-\sin x)\, e^{\cos x}$$

Einsetzen in DGL:

$$y' + \sin(x)\, y$$

$$= 4x^3 e^{\cos x} + \underline{\left(-\frac{2}{e} + x^4\right)(-\sin x)\, e^{\cos x}}$$

$$\underline{+ \sin(x)\left(-\frac{2}{e} + x^4\right) e^{\cos x}}$$

kürzen

$$= 4x^3 e^{\cos x}$$ entspricht rechter Seite ✓

Prüfe noch AWP: $y(0) = -2$

Einsetzen $$y(0) = \left(-\frac{2}{e} + 0^4\right) e^{\cos 0}$$

$$= -\frac{2}{e}\, e^1 = -2$$ ✓