Vortragsübung 3

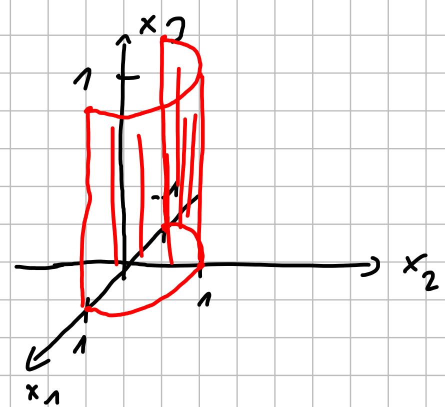
Aufgabe 7:

$$J = [0,1] \times [0,\pi]$$

$$\Phi : J \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

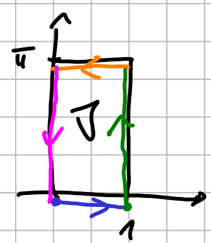
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Skizziere $\Phi(J) =: S$:



Halbzylinder ohne Deckel und Boden

(b) Parametrisiere ∂J



$$c_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$c_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ \pi \end{pmatrix}$$

$$c_4 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - t \end{pmatrix}$$

Bestimme $\Phi \circ c_j$:

$$\underline{\bar{\Phi}} \circ c_1(t) = \underline{\bar{\Phi}}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Ableitung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

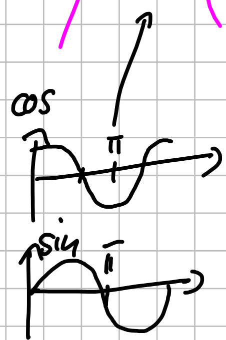
$$\underline{\bar{\Phi}} \circ c_2(t) = \underline{\bar{\Phi}}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ableitung $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

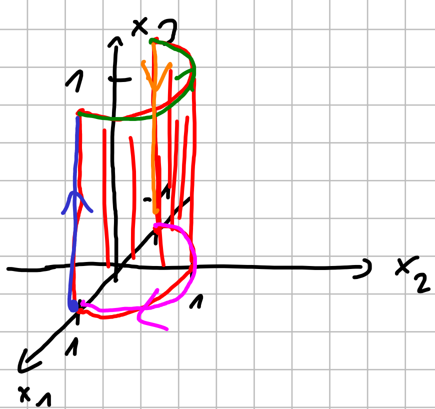
$$\underline{\bar{\Phi}} \circ c_3(t) = \underline{\bar{\Phi}}\begin{pmatrix} 1-t \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

Ableitung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\bar{\Phi}} \circ c_4(t) = \underline{\bar{\Phi}}\begin{pmatrix} 0 \\ \pi - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi - t) \\ \sin(\pi - t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$



Ableitung: $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$



(c) Berechne $Z(g, \partial S)$

$$Z(g, \partial S) = \sum_{j=1}^{4} \int_{a_j}^{b_j} g\big((\Phi \circ c_j)(t)\big) \cdot (\Phi \circ c_j)'(t)\,dt$$

Für jedes c_j einzeln:

$j=1$: $\int_0^1 g(\Phi \circ c_1(t)) \cdot (\Phi \circ c_j)'(t)\,dt$

$$= \int_0^1 \underbrace{g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 1\,dt = 1$$

$j=2$: $\int_0^{\pi} g(\Phi \circ c_2(t)) \cdot (\Phi \circ c_2)'(t)\,dt$

$$= \int_0^{\pi} g\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2\sin(t)^2 + 2\cos(t)^2\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2\,dt = 2\pi$$

$j=3: \quad \int_0^1 g\left(\Phi \circ c_3(t)\right) \cdot (\Phi \circ c_3)'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 g\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2(1-t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 -1 \, dt \qquad = -1$$

$j=4: \quad \int_0^{\pi} g\left(\Phi \circ c_4(t)\right) \cdot (\Phi \circ c_4)'(t)\, dt$

$$= \int_0^{\pi} g\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi} 0 \, dt \qquad = 0$$

Zusammen:

$$Z(g, \partial S) = 1 + 2\pi + (-1) + 0 = 2\pi$$

(d) Berechne $\iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO$

Vorbereitung: Berechne $\operatorname{rot} g$:

$$\operatorname{rot} g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2x_1 \\ -2x_2 - 0 \\ 2x_3 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}$$

Weitere Vorbereitung:

$$\Phi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO = \iint_J \operatorname{rot} g\,(\Phi(u,v)) \cdot \left(\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\right) du\, dv$$

$$= \int_0^\pi \int_0^1 \operatorname{rot} g \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_0^\pi \int_0^1 \begin{pmatrix} -2\cos v \\ -2\sin v \\ 4u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_0^\pi \int_0^1 2\cos(v)^2 + 2\sin(v)^2 + 0 \, du\, dv$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{1} 2 \; du \; dv \quad = \quad 2\pi$$

(e)

$$2\pi \overset{(c)}{=} Z(g, \partial S) \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO \overset{(d)}{=} 2\pi$$

Aufgabe 8:

Gewöhnliche DGL: $y' - (4 - 3x)\, y = 0$

„Wachstumskonst." „Vergiftungskonst."

(a) Bestimme alle Lösungen:

1. Möglichkeit: Als homogene lineare DGL 1. Ordnung

$$y' \underbrace{- (4-3x)}_{g(x)} y = 0$$

Hat nach Satz 3.3.2 die Lösungen

$$y = f(x) = C \cdot e^{-G(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

wobei G Stammfkt. von $g(x) = -(4-3x)$

d.h. $G(x) = -4x + \frac{3}{2} x^2$

Also: Lösungen $y = f(x) = C \cdot e^{4x - \frac{3}{2} x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

2. Möglichkeit: Als separierbare DGL

$y = 0$ ist eine Lösung der DGL

Für $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = y' = (4-3x)\, y$$

Trennen nach x und y: $\frac{dy}{y} = (4-3x)\,dx$

Stammfunktion: $\int \frac{dy}{y} = \int 4-3x \; dx + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

$$\ln|y| = 4x - \frac{3}{2}x^2 + \tilde{c}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{=c} \; e^{4x-\frac{3}{2}x^2}$$

$$y = c \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2}$$

zu $c \in \mathbb{R}$, denn $y=0$ ist auch Lösung der DGL.

(b) Anfangswertproblem $y(0) = 5$

Aus (a): $y(x) = c \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

Löse: $5 \overset{!}{=} y(0) = c \cdot e^{4\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0^2} = c \cdot 1$

d.h. $5 = c$

Einsetzen: $y(x) = 5 \cdot e^{4x - \frac{3}{2}x^2}$ ist Lösung des AWP.

Aufgabe 9: Nichthomogene lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + \sin(x)\, y = 4x^3 e^{\cos x}$$

(a) Bestimme alle homogenen Lösungen, d.h. Lösungen von

$$y' + \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} y = 0$$

Nach 3.3.2 gilt:

$$f_h(x) = C \cdot e^{-G(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

wobei $G(x)$ Stammfkt. von $g(x) = \sin(x)$

also $G(x) = -\cos(x)$

Einsetzen:

$$f_h(x) = C \cdot e^{\cos x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) Berechne eine partikuläre Lösung:

$$y' + \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} y = \underbrace{4x^3 e^{\cos x}}_{u(x)}$$

Nach 3.3.7:

$$f_p(x) = k(x) \cdot e^{-G(x)}$$

wobei $k(x)$ Stammfkt. von

$$u(x) \cdot e^{G(x)} = 4x^3 e^{\cos x} e^{-\cos x} = 4x^3$$

Also:

$$k(x) = x^4$$

Damit: $f_p(x) = k(x)\, e^{-G(x)} = x^4\, e^{\cos x}$

(c) Alle Lösungen:

Nach 3.3.8 ist jede Lösung gegeben durch

$$y = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= C \cdot e^{\cos x} + x^4\, e^{\cos x} \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$= (C + x^4)\, e^{\cos x}$$

(d) Anfangswertproblem $y(0) = -2$

$$-2 \overset{!}{=} y(0) = (C + 0^4)\, e^{\cos(0)} = C \cdot e^1$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{e} = C$$

Also: Lösungen des AWP

$$y = \left(-\frac{2}{e} + x^4\right) e^{\cos x}$$

Bonus: Probe der Lösung

Ableiten der Lösung:

$$y' = 4x^3 e^{\cos x} + \left(-\frac{2}{e} + x^4\right)(-\sin x)\, e^{\cos x}$$

Einsetzen in DGL:

$$y' + \sin(x)\, y$$

$$= 4x^3 e^{\cos x} + \left(-\frac{2}{e} + x^4\right)(-\sin x)\, e^{\cos x}$$

Kürzen

$$+ \sin(x) \cdot \left(-\frac{2}{e} + x^4\right) e^{\cos x}$$

$$= 4x^3 e^{\cos x}$$ entspricht rechte Seite ✓

AWP: $y(0) = \left(-\frac{2}{e} + 0^4\right) e^{\cos 0} = -\frac{2}{e} \cdot e = -2$

✓