Vortragsübung 4

Aufgabe 10:

Betrachte DGL $\quad y'' + 2y' + 2y = 0$

(a) Charakteristisches Polynom $\quad p(X) = X^2 + 2X + 2$

Faktorisiere in Linearfaktoren

NST berechnen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Also $x_1 = -1+i \qquad x_2 = -1-i$

Faktorisierung $\quad p(x) = (x - (-1+i))(x - (-1-i))$

(b) Fundamentalsystem bestimmen:

Nach 4.4.5:

Da $p(x) = (x - (-1+i))^1 (x - (-1-i))^1$

Lies ab: $\mu_1 = -1+i \qquad \overline{\mu_1} = -1-i$

sind kompl. konj. NST von p.

$\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \qquad$ also $\alpha_1 = -1, \beta_1 = 1$

mit Vielfachheit $m_1 = 1$

Fundamentalsystem der DGL nach 4.4.5:

$$f_1(x) = e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) = e^{-x} \cos(x)$$

$$f_2(x) = e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x) = e^{-x} \sin(x)$$

(c) Alle Lösungen:

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

$$= C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

$$= e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Anfangswertproblem: $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$

Zunächst $y(0) = 5$

$$5 \overset{!}{=} f(0) = e^{-0} (C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0))$$

$$= 1 (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0)$$

$$= C_1$$

Also: $C_1 = 5$.

Betrachte $y'(0) = 0$:

Allgemeine Lösung ableiten:

$$f'(x) = -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

$$= e^{-x}(-C_1 \cos x - C_2 \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

$$= e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_2 - C_1)\sin x)$$

Lösen:

$$0 \overset{!}{=} f'(0) = e^{-0}((-C_1 + C_2)\cos(0) + (-C_2 - C_1)\sin 0)$$

$$= -C_1 + C_2$$

Setze ein: $C_1 = 5 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} -5 + C_2$

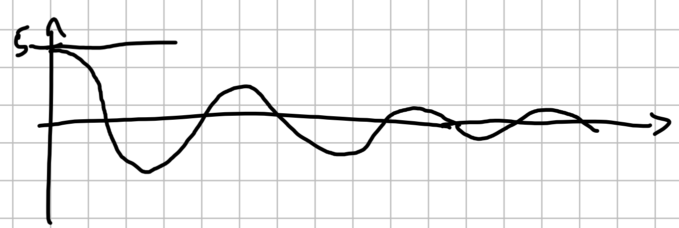
Also: $C_2 = 5$

Also: Lösung des AWP:

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

$$= 5 \cdot e^{-x} \cos x + 5 e^{-x} \sin x$$

$$= 5 \cdot e^{-x}(\cos x + \sin x)$$



Aufgabe 11:

Betrachte auf $(0,\pi)$ die DGL

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

(a) Fundamentalsystem der homogenen DGL:

$$y'' + y = 0$$

Char. Poly: $p(X) = X^2 + 1$

Faktorisieren: $p(X) = (X-i)(X+i)$

Die kompl. konj. NST sind $\mu_1 = i$, $\overline{\mu_1} = -i$

zu $\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$

mit Vielfachheit $m_1 = 1$

Fundamentalsystem nach 4.4.5:

$$f_1(x) = e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) = \cos x$$

$$f_2(x) = e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) = \sin x$$

Bestimme Wronskimatrix:

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Inverse der Wronskimatrix:

$$\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{\det(W(x))} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\overset{\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1}{=} 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

(b) Bestimme eine part. Lösung

$$y'' + y = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{= h(x)}$$

Nutze 5.2.1:

Löse
$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

d.h.
$$W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\cos x}{\sin x} \end{pmatrix}$$

Also: $c_1'(x) = -1$, $c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot\!an(x)$

Berechne Stammfunktionen:

$$c_1(x) = \int -1 \, dx = -x + C_1 \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{\cos x}{u} \, dx$$

Substituiere $u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow du = \cos x \, dx$

$$= \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C_2 = \ln|\sin x| + C_2$$

$C_2 \in \mathbb{R}$

Nach 5.2.1 ist eine part. Lösung gegeben durch ($C_1 = C_2 = 0$ da nur eine Lösung gesucht)

$$f_p(x) = c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x)$$

$$= -x \cos x + \ln(|\sin x|) \sin x$$

(c) Alle Lösungen von $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$:

Alle Lösungen sind gegeben durch

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + f_p(x)$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \ln(|\sin x|) \sin x$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 12:

Betrachte DGL

$$y'' - 6y' + 9y = (x^2+1)\, e^{3x}$$

(a) Bestimme eine part. Lösung:

Notation wie in 5.3.2:

Char. Poly: $\quad p(X) = X^2 - 6X + 9$

$$r(x) = x^2 + 1$$

$$\mu = 3$$

Grad von p: $\quad d = 2$

Faktorisiere p, d.h. berechne NST:

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$$

d.h. p hat eine doppelte NST, also:

$$p(X) = (X-3)^2$$

Da auch $\mu = 3$ eine 2-fache von p.

D.h. in 5.3.2 sind wir im Resonanzfall mit 2-facher NST, d.h. $m=2$ in 5.3.2.

Nach 5.3.2 hat die DGL eine part. Lösung der Form

$$f_p(x) = x^m\, s(x)\, e^{\gamma x} = x^2\, s(x)\, e^{3x}$$

wobei $s(x) = s_2 x^2 + s_1 x + s_0$ ein Polynom vom Grad $d = 2$.

Bestimme s wie im Beweis von 5.3.2. angegeben, d.h. Löse

$$p(D+\gamma)\left(x^m s(x)\right) \overset{!}{=} r(x)$$

d.h. $$p(D+3)\left(x^2 s(x)\right) \overset{!}{=} x^2+1 \qquad (*)$$

Nebenrechnung: Bestimm $p(X+3)$

$$\begin{aligned} p(X+3) &= (X+3)^2 - 6(X+3) + 9 \\ &= X^2 + 6X + 9 - 6X - 18 + 9 \\ &= X^2 \end{aligned}$$

Setze D ein: $p(D+3) = D^2$

Setze $x^2 s(x) = x^2(s_2x^2 + s_1x + s_0) = s_2x^4 + s_1x^3 + s_0x^2$ ein:

$$p(D+3)\left(x^2 s(x)\right) = D^2\left(x^2 s(x)\right)$$
$$= D^2\left(s_2 x^4 + s_1 x^3 + s_0 x^2\right)$$
$$= \left(s_2 x^4 + s_1 x^3 + s_0 x^2\right)''$$
$$= \left(4 s_2 x^3 + 3 s_1 x^2 + 2 s_0 x\right)'$$
$$= 12 s_2 x^2 + 6 s_1 x + 2 s_0$$

Löse also ⊛:

$$12 s_2 x^2 + 6 s_1 x + 2 s_0 \overset{!}{=} x^2 + 1$$

Koeffizientenvergleich:

$$12 s_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{1}{12}$$
$$6 s_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0$$
$$2 s_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_0 = \frac{1}{2}$$

D.h. $s(x) = \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{2}$

Nach 5.3.2 ist eine part. Lösung gegeben durch

$$f_p(x) = x^m s(x) e^{\nu x}$$
$$= x^2 \left(\frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{3x}$$
$$= \left(\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^2\right) e^{3x}$$

(b) Bestimme alle Lösungen von $y'' - 6y' + 9 = (x^2+1)e^{3x}$

Bestimme zunächst mit 4.4.5 Fundamentalsystem von

$$y'' - 6y' + 9 = 0$$

Char. Poly $\quad p(x) = (x-3)^2$ mit 2-facher NST 3

Also ist nach 4.4.5 ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$f_1(x) = e^{3x}$$

$$f_2(x) = x^1 e^{3x} = x e^{3x}$$

Damit sind alle Lösungen der DGL gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) \\ &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + f_p(x) \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \left(\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right) e^{3x} \\ &= e^{3x}\left(c_1 + c_2 x + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.