Vortragsübung 4

Aufgabe 10:

Betrachte DGL $\quad y'' + 2y' + 2y = 0$

(a) • Char. Poly. bestimmen
- NST von Char. Poly. berechnen (in $\mathbb{C}$)
- Polynom in Linearfaktoren zerlegen

Char. Polynom:

$$p(X) = X^2 + 2X + 2$$

NST in $\mathbb{C}$:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

D.h. $x_1 = -1+i \qquad x_2 = -1-i$

Faktorisiere P:

$$p(X) = (X - (-1+i)) \cdot (X - (-1-i))$$

(b) Fundamentalsystem bestimmen:

Nach 4.4.5:

Da $p(x) = (x-(-1+i))^1 (x-(-1-i))^1$

hat zwei konj. komplexe NST

Wie in 4.4.5:

$$\mu_1 = -1+i \qquad \overline{\mu_1} = -1-i$$

In 4.4.5: $\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ d.h. $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 1$

mit Vielfachheit $m_1 = 1$.

~~Lösu~~ ~~#~~ Dann bilden nach 4.4.5 folgende Funktionen ein Fundamentalsystem:

$$f_1(x) = e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) = e^{-x} \cos(x)$$

$$f_2(x) = e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x) = e^{-x} \sin(x)$$

(c) Alle Lösungen der DGL:

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

$$= e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(d) Anfangswertproblem: $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$

Zunächst $y(0) = 5$:

$$5 \stackrel{!}{=} f(0) = e^{-0}\left(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)\right)$$
$$= 1\left(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0\right)$$
$$= C_1$$

Also $C_1 = 5$

Nun: $y'(0) = 0$

$$0 \stackrel{!}{=} f'(0)$$

Ableiten: $f'(x) = -e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$

$$= e^{-x}\left((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 - C_2)\sin x\right)$$

Einsetzen: $C_1 = 5$

$$f'(x) = e^{-x}\left((C_2 - 5)\cos x + (-5 - C_2)\sin x\right)$$

Bedingung $y'(0) = 0$

$$0 \stackrel{!}{=} f'(0) = e^{-0}\left((C_2 - 5)\cos 0 + (-5 - C_2)\sin 0\right)$$
$$= 1 \cdot \left((C_2 - 5) \cdot 1 + (-5 - C_2) \cdot 0\right)$$
$$= (C_2 - 5)$$

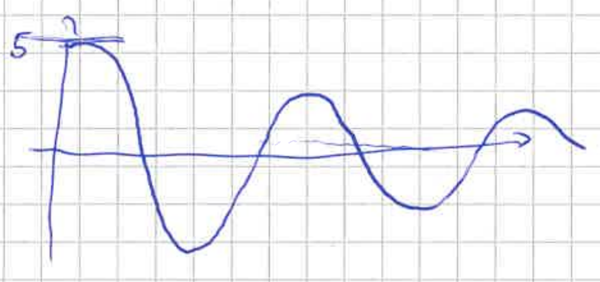
$\Rightarrow C_2 = 5$

Also: Lösungen des AWP

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

$$= 5 e^{-x} \cos x + 5 e^{-x} \sin x$$

$$= 5 e^{-x} (\cos x + \sin x)$$



Aufgabe 11

Betrachte auf $(0,\pi)$

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

(a) Fundamentalsystem der hom. DGL

$$y'' + y = 0$$

Char. Polynom: $P(x) = x^2 + 1$

Faktorisiern: $P(x) = (x-i)^1 (x+i)^1$

Wie in 4.4.5: Kompl. Konj. NST $\mu_1 = i$, $\overline{\mu_1} = -i$

$\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ d.h. $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$

mit Vielfachheit $m_1 = 1$

Fundamentalsystem nach 4.4.5:

$$f_1(x) = e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) = \cos x$$

$$f_2(x) = e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x) = \sin x$$

Wronskimatrix:

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Inverse der Wronskimatrix:

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{\det W(x)} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

(b) Bestimme eine partikuläre Lösung von $y'' + y = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{=h(x)}$

Nutze 5.2.1

Löse

$$W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Mit $W^{-1}(x)$:

$$W^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

"

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\cos x}{\sin x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

Also: $c_1'(x) = -1$, $c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotan x$

D.h. $c_1(x) = \int -1\,dx = -x + C_1$ $\quad C_1 \in \mathbb{R}$

$$c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{u}\,dx$$

Substitution $u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C_2 \quad , C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \ln(|\sin x|) + C_2$$

Nach 5.2.1 ist eine part. Lösung gegeben durch

(Setze $C_1 = C_2 = 0$)

$$f_p(x) = c_1(x)\,f_1(x) + c_2(x)\,f_2(x)$$

$$= -x \cos x + \ln(|\sin x|) \sin x$$

(c) Alle Lösungen von $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + f_p(x)$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \ln(|\sin x|)\sin x$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 12:

Betrachte DGL

$$y'' - 6y' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$$

(a) Eine partikuläre Lösung f_p

Notation wie in 5.3.2

Char. Polynom: $p(x) = x^2 - 6x + 9$

$$r(x) = x^2 + 1$$

$$\mu = 3$$

Grad vom P: $d = 2$

Faktorisiere p:

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$$

$\Rightarrow p(x) = (x-3)^2$ mit doppelter NST 3

Da auch $\mu = 3$ sind wir im Resonanzfall.

mit doppelter NST, d.h. $m = 2$ in 5.3.2

Nach 5.3.2 hat die DGL eine part. Lösung der Form

$$f_p(x) = x^m s(x) e^{\mu x} = x^2 s(x) e^{3x}$$

wobei $s(x) = s_2 x^2 + s_1 x + s_0$ ein Polynom vom Grad $d = 2$.

Bestimme $s(x)$ wie im Beweis von 5.3.2 beschrieben

$$p(D+\mu)\,(x^m s(x)) \stackrel{!}{=} r(x) \quad (*)$$

d.h. $p(D+3)$

Nebenrechnung:

$$p(x+3) = (x+3)^2 - 6(x+3) + 9$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 9$$

$$= x^2$$

Also $p(D+3) = D^2$

Setze in $p(D+\mu)(x^m s(x))$ ein:

$$p(D+3)\,(x^2 s(x))$$

$$= p(D+3)\,(s_2 x^4 + s_1 x^3 + s_0 x^2)$$

$$= D^2 \left(s_2 x^4 + s_1 x^3 + s_0 x^2 \right)$$

$$= \left(s_2 x^4 + s_1 x^3 + s_0 x^2 \right)''$$

$$= \left(4 s_2 x^3 + 3 s_1 x^2 + 2 s_0 x \right)'$$

$$= 12 s_2 x^2 + 6 s_1 x + 2 s_0$$

Also nach ⊛ :

$$12 s_2 x^2 + 6 s_1 x + 2 s_0 \overset{!}{=} x^2 + 1$$

Koeffizientenvergleich

$$\cancel{x} \quad \cancel{12 s_2} \quad 12 s_2 = 1$$

$$6 s_1 = 0$$

$$2 s_0 = +1$$

Lösen: $s_2 = \frac{1}{12}$, $s_1 = 0$, $s_0 = +\frac{1}{2}$

Nach 5.3.2 ist eine part. Lösung gegeben ~~als~~ als

$$f_p(x) = x^m \, s(x) \, e^{\mu x}$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{2} \right) e^{3x}$$

$$= \left(\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{3x}$$

(b) Bestimme alle Lösungen von

$$y'' - 6y' + 9y = (x^2+1)\, e^{3x}$$

Bestimme Fundamentalsystem der hom DGL

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Nach 4.4.5 (mit doppelter NST des char. Polynoms $p(x) = (x-3)^2$)

ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$f_1(x) = e^{3x} \qquad f_2(x) = x e^{3x}$$

Also $f_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Damit sind alle Lösungen der DGL gegeben als

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \left(\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^2\right) e^{3x}$$

$$= \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^2\right) e^{3x}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$