Vortragsübung 5

Aufgabe 13

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Betrachte DGL-System $y' = Ay$

(a) Für $B = A - 2E_3$, bestimme minimales $k \geq 0$ mit $A^k v = 0$

wobei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne $B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k=0$: $B^0 v = E_3 v = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$k=1$: $B^1 v = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$k=2$: $B^2 v = B \cdot (B \cdot v) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also ist das gesuchte minimale k ist gegeben durch $k = 2$.

(b) Bestimme Fundamentalsystem

Eigenwerte von A nach Aufgabe 2 (doppelte NST von char. P.)
3 (einfache NST)

Zunächst Eigenwert 3:

Berechne den Eigenraum $\ker(A - 3E_3)$

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne Kern:

$$\left(\begin{array}{ccc} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{+}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\ker(A - 3E_3) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Insbesondere ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Nach 6.1.3 ist also

$$f_1(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

Jetzt zum Eigenwert 2:

Nach (a) gilt für $B = A - 2E_3$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B^0 v \neq 0 \qquad B^1 v \neq 0 \qquad B^2 v = 0$$

Verfahre daher nach Bem. 6.1.10. Demnach sind weitere Lösungen des DGL-Systems gegeben als

(wie in (a) $k=2$, $\lambda = 2$)

$$f_2(x) = e^{2x} \frac{x^0}{0!} B^{k-1} v = e^{2x} B^1 v = e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3(x) = e^{2x} \left(\frac{x^1}{1!} B^{k-1} v + \frac{x^0}{0!} B^{k-2} v \right)$$

$$= e^{2x} \left(x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{2x} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um zu prüfen, ob f_1, f_2, f_3 ein Fundamentalsystem bilden, prüfen wir lineare Unabhängigkeit nach Bem. 6.1.4, es reicht also, die lineare Unabhängigkeit von $f_1(0), f_2(0), f_3(0)$ zu zeigen:

$$\left(f_1(0), f_2(0), f_3(0) \right) = \left(e^{3 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Prüfe lineare Unabhängigkeit mit det

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$= (-1) \cdot 1 \qquad = -1 \qquad \neq 0$$

Also gilt lineare Unabhängigkeit und f_1, f_2, f_3 bilden ein Fundamentalsystem.

(c) Löse Anfangswertproblem $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung nach (b):

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$= c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setze $x = 0$ ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} f(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Löse: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (3)$$

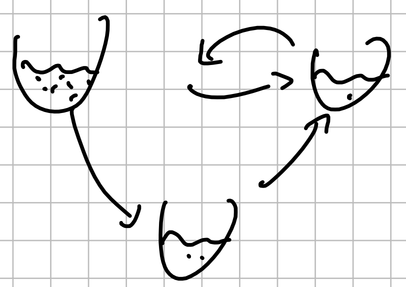
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also Lösung ablesen: $c_1 = 4 \quad c_2 = -1 \quad c_3 = 1$

Also Lösung des Anfangswertproblems:

$$f(x) = 4\, e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 14

(a) Berechne $\mathcal{L}(3t \sin t)$

Rechne wie in 5.4.7 beschrieben mit

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

hier $\omega = 1$.

$$\circledast = \mathcal{L}(t e^{it}) \overset{5.4.6.}{=} \frac{1!}{(s-i)^2} = \frac{(s+i)^2}{((s-i)^2(s+i)^2)}$$

$\binom{a=1}{n=1}$

$$= \frac{s^2+2si-1}{(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + i \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\circledast = \mathcal{L}(t e^{it}) = \mathcal{L}(t \cos t + i t \sin t)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{L}(t \cos t) + i \mathcal{L}(t \sin t)$$

Vergleiche Imaginärteile: $\mathcal{L}(t \sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

Damit $\mathcal{L}(3t \sin t) \overset{\text{Linearität}}{=} 3 \mathcal{L}(t \sin t)$

$$= 3 \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{6s}{(s^2+1)^2}$$

(6) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}\right)$

Partialbruchzerlegung:

Faktorisiere Nenner: $s^3+s^2 = s^2(s+1)$

Ansatz:

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2} \qquad \Big| \cdot s^2(s+1)$$

$$s+2 \overset{!}{=} \alpha s^2 + (\beta s+\gamma)(s+1)$$

$$= \alpha s^2 + \beta s^2 + \beta s + \gamma s + \gamma$$

$$= (\alpha+\beta) s^2 + (\beta+\gamma)\cdot s + \gamma$$

Koeffizientenvergleich: $\alpha+\beta \overset{!}{=} 0 \quad \beta+\gamma \overset{!}{=} 1 \quad \gamma \overset{!}{=} 2$

Also: $\gamma = 2 \xRightarrow{\beta+\gamma \overset{!}{=} 1} \beta = -1 \xRightarrow{\alpha+\beta \overset{!}{=} 0} \alpha = 1$

Damit (einsetzen):

$$\frac{s+2}{s^3+s^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+2}{s^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}$$

Betrachte also

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

Nach 5.4.4 $\quad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

mit $a=-1$: $\quad \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)$$

Nach 5.4.4 $\quad \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

Damit $\quad \mathcal{L}(2t) = \frac{2}{s^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right) = 2t$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ $\quad$ Nach 5.4.4: $\quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}\right) = e^{-t} + 2t - 1$$

Aufgabe 15

Betrachte das Anfangswertproblem:

$$y'' + 9y = \sin(3t) \qquad y'(0) = 0,\ y(0) = 0$$

Löse mit Satz 5.4.15

Charakteristisches Polynom : $p(X) = X^2 + 9$

rechte Seite : $g(x) = \sin(3x)$

Suche nach 5.4.15 ein u mit

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^2+9}$$

Suche also $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$

Nach 5.4.6. gilt $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Wir wollen dabei $\frac{1}{s^2+9} \overset{!}{=} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Geht nicht... Nutze Linearität:

$$\mathcal{L}(\alpha \sin(\omega t)) = \alpha \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \overset{!}{=} \frac{1}{s^2+9}$$

Also $\alpha\omega \overset{!}{=} 1 \qquad \omega^2 \overset{!}{=} 9$

Löse: $\omega = 3 \qquad \alpha = \frac{1}{3}$

Damit

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\sin(3t)\right) = \frac{1}{s^2+9}$$

Damit $u(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$

Nach 5.4.15 ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(t) = (u * g)(t) = \int_0^t u(t-\tau)\cdot g(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1}{3}\sin(3(t-\tau))\cdot \sin(3\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^t \frac{1}{2}\left(\cos(3\tau - 3(t-\tau)) - \cos(3\tau + 3(t-\tau)\right) d\tau$$

$\sin(x)\sin(y)$
$= \frac{1}{2}(\cos(y-x) - \cos(y+x))$

$$= \frac{1}{6}\int_0^t \cos(6\tau - 3t) - \cos(3t)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_0^t \cos(6\tau-3t)\, d\tau - \int_0^t \cos(3t)\, d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_0^t \cos(6\tau - 3t)\, d\tau - t\cos(3t)\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin(3t) - t\cos(3t)\right)$$

$$= \frac{\sin(3t)}{18} - \frac{t\cos(3t)}{6}$$

⊛ Nebenrechnung:

$$\int \cos(6\tau - 3t)\, d\tau = \int \cos v \,\tfrac{1}{6}\, dv$$

Substituiere $v = 6\tau - 3t$

$$\frac{dv}{d\tau} = 6 \Rightarrow dv = 6\, d\tau$$

$$= \frac{1}{6} \sin(v) = \frac{1}{6} \sin(6\tau - 3t)$$

Damit: $\int_0^t \cos(6\tau - 3t)\, d\tau$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin(6t - 3t) - \sin(0 - 3t)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin(3t) - \sin(-3t)\right)$$

$-\sin t = \sin(-t)$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin(3t) + \sin(3t)\right)$$

$$= \frac{1}{3} \sin(3t)$$

Also ist die Lösung des AWP:

$$f(t) = \frac{\sin(3t)}{18} - \frac{t\cos(3t)}{6}$$

Anwendung: