Vortragsübung 5

Aufgabe 13:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{DGL-System } y' = Ay$$

(a) Für $B = A - 2E_3$, bestimme minimales $k \geq 0$ mit

$B^k v = 0$ wobei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^0 v = E_3 v = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$B^1 v = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 v = B(Bv) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. das gesuchte minimale k ist gegeben durch $k = 2$.

(b) Fundamentalsystem bestimmen:

Betrachte zunächst den Eigenwert 3: (da $p(x) = (x-2)^2(x-3)$)

Bestimme den zugehörigen Eigenraum $\ker(A - 3E_3)$

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$+$

$$\ker(A - 3E_3) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Insbesondere ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3

Nach 6.1.3 erhalten wir folgende Lösung des DGL-Systems:

$$f_1(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Eigenwert 2:

Nach (a): Für $B = A - 2E_3$ gilt:

$$B^0 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^1 v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit minimalem k mit $B^k v = 0$: $k = 2$.

$$f_2(x) = e^{2x} \frac{x^0}{0!} \underbrace{B^{k-1} v}_{= B^1 v} = e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3(x) = e^{2x} \left(\frac{x^1}{1!} B^{k-1} v + \frac{x^0}{0!} \underbrace{B^{k-2} v}_{= B^0 v} \right)$$

$$= e^{2x} \left(x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{2x} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um zu prüfen, ob f_1, f_2, f_3 wirklich ein Fundamentalsystem sind, prüfen wir deren lineare Unabhängigkeit.

Bem 6.1.4 reicht es zu zeigen, dass $(f_1(0), f_2(0), f_3(0))$ linear unabh. ist.

$$(f_1(0), f_2(0), f_3(0)) = \left(e^{3 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Prüfe lineare Unabh. mit det :

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1 = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Also gilt lineare Unabhängigkeit und f_1, f_2, f_3 bilden ein Fundamentalsystem.

(c) Löse AWP $\quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung nach (b):

$$f(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Setze 0 ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} f(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Löse LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad +\cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad +(\cdot 3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)$$

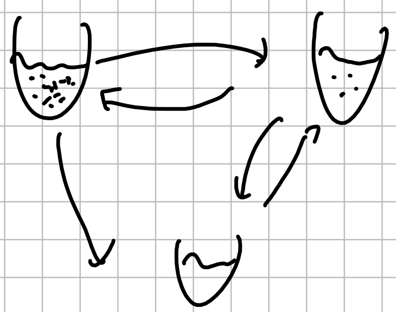
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

D.h. Lösung des LGS: $c_1 = 4, \; c_2 = -1, \; c_3 = 1$

Damit: Lösung des AWP:

$$f(x) = 4e^{3x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - e^{2x}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + e^{2x}\begin{pmatrix}3x\\2x\\1\end{pmatrix}$$

Anwendung:



Aufgabe 14:

(a) Berechne $\mathcal{L}(3t \sin t)$

Berechne wie in 5.4.7 beschrieben mit $e^{it} = \cos t + i \sin t$:

$$(*) = \mathcal{L}(t e^{it}) \overset{5.4.6}{=} \frac{1!}{(s-i)^2} = \frac{(s+i)^2}{((s-i)(s+i))^2}$$

$$= \frac{s^2 + 2is - 1}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + i \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Andererseits:

$$(*) = \mathcal{L}(t e^{it}) = \mathcal{L}(t \cos t + it \sin t)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{L}(t \cos t) + i \mathcal{L}(t \sin t)$$

Vergleiche Imaginärteile: $\mathcal{L}(t \sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

Mit Linearität von $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(3t \sin t) = 3 \cdot \mathcal{L}(t \sin t)$

$$= 3 \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{6s}{(s^2+1)^2}$$

(b) Berechne $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}\right)$.

Partialbruchzerlegung:

Faktorisiere Nenner: $s^3+s^2 = s^2(s+1)$

Ansatz:

$$\frac{s+2}{s^3+s^2} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2} \qquad \Big| \cdot s^2(s+1)$$

$$s+2 \overset{!}{=} \alpha \cdot s^2 + (\beta s+\gamma)(s+1)$$

$$= \alpha s^2 + \beta s^2 + \beta s + \gamma s + \gamma$$

$$= (\alpha+\beta)s^2 + (\beta+\gamma)s + \gamma$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha+\beta \overset{!}{=} 0, \quad \beta+\gamma \overset{!}{=} 1, \quad \gamma \overset{!}{=} 2$$

Also: $\gamma = 2 \overset{\beta+\gamma=1}{\Rightarrow} \beta = -1 \overset{\alpha+\beta=0}{\Rightarrow} \alpha = 1$

Einsetzen:

$$\frac{s+2}{s^3+s^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+2}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}$$

Also: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$: Nach 5.4.4:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}$$

Also: $a = -1$: $$\mathcal{L}\left(e^{-t}\right) = \frac{1}{s+1}$$

Damit: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)$: Nach 5.4.4. : $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

Also: $$\mathcal{L}(2t) = \frac{2}{s^2}$$

Damit: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right) = 2t$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$: Nach 5.4.4 : $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

Damit: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

Zusammen:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}\right) = e^{-t} + 2t - 1$$

Aufgabe 15

Betrachte AWP $y'' + 9y = \sin(3t)$

$$y'(0) = y(0) = 0$$

Löse mittels 5.4.15

Characteristisches Polynom: $p(X) = X^2 + 9$

rechte Seite: $g(t) = \sin(3t)$

Nach 5.4.15 suche u mit

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^2+9}$$

Nutze zur Lösung 5.4.6:

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Wir wollen $\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \overset{!}{=} \frac{1}{s^2+9}$

Geht nicht... Nutze also Linearität von $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(\alpha \sin(\omega t)) = \frac{\alpha\omega}{s^2+\omega^2} \overset{!}{=} \frac{1}{s^2+9}$$

Also: $\alpha\omega = 1$

$\omega^2 = 9$

Damit : $\omega = 3$, $\alpha = \frac{1}{3}$

Also: $\mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\sin(3t)\right) = \frac{1}{s^2+9}$

Das heißt: $u(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$

Nach 5.4.15. ist die Lösung des AWP gegeben durch

$$f(t) = (u * g)(t) = \int_0^t u(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1}{3}\sin(3\cdot(t-\tau))\sin(3\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^t \frac{1}{2}\left(\cos(3\tau - 3(t-\tau)) - \cos(3\tau + 3(t-\tau))\right)d\tau$$

$\sin x \sin y$
$= \frac{1}{2}(\cos(y-x) - \cos(y+x))$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_0^t \cos(6\tau - 3t)\,d\tau - \int_0^t \cos(3t)\,d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_0^t \cos(6\tau-3t)\,d\tau - t\cdot\cos(3t)\right)$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{18}\sin(3t) - t\cdot\frac{1}{6}\cos(3t)$$

Nebenrechnung $\otimes$:

$$\int \cos(6\tau - 3t)\, d\tau = \int \cos v \ \frac{1}{6}\, dv$$

Substitution: $v = 6\tau - 3t$

$$\frac{dv}{d\tau} = 6 \Rightarrow dv = 6\, d\tau$$

$$= \frac{1}{6} \sin v = \frac{1}{6} \sin(6\tau - 3t)$$

Mit Grenzen:

$$\int_0^t \cos(6\tau - 3t)\, d\tau = \frac{1}{6}\Big(\sin(6t - 3t) - \sin(0 - 3t)\Big)$$

$-\sin t = \sin(-t)$

$$\overset{}{=} \frac{1}{6}\Big(\sin(3t) + \sin(3t)\Big) = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

Also ist die Lösung des AWP:

$$f(t) = \frac{\sin(3t)}{18} - \frac{t\cos(3t)}{6}$$

Anwendung: