

Blatt 1

Vortragsübung am Mi 25.10.23, Fr 27.10.23

Aufgabe 1 Integrieren Sie die Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{xy}$ über dem Bereich

$$D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}.$$

Skizzieren Sie zusätzlich D und zeigen Sie, dass D ein Normalbereich bezüglich beider Achsen ist.**Aufgabe 2**

- (a) Berechnen Sie das Volumen eines Kegels mit Radius R und Höhe h mit Hilfe der Formel zur Berechnung des Volumens für Drehkörper.
- (b) Es seien $R > r > 0$. Ein Torus ist ein Rotationskörper, der durch $r_1, r_2 : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$r_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

und

$$r_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

begrenzt wird. Skizzieren Sie den Torus und berechnen Sie sein Volumen.

Aufgabe 3 Sei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 2, x_1^2 \leq x_2 \leq x_1 + 2\}$. Sei K die geschlossene Kurve, die D berandet. Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$$

- (a) Skizzieren Sie D .
- (b) Es soll K positiv orientiert werden. Zerlegen Sie K in geeignete Teilkurven und parametrisieren Sie diese.
- (c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K)$ als Kurvenintegral.
- (d) Berechnen Sie

$$\iint_D \operatorname{rot} g \, dx_1 \, dx_2$$

als Gebietsintegral.

- (e) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Green.