

Blatt 4

Vortragsübung am Mi 20.12.23, Fr 22.12.23

Aufgabe 9 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - y'' + 5y' - 5y = 3$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$. Es bezeichne $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

- Sei $u(t)$ die Lösung von $y''' - y'' + 5y' - 5y = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 0$ und $y''(0) = 1$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $U(s)$ zu $u(t)$.
- Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.
- Bestimmen Sie $f(t)$.

Aufgabe 10 Wir betrachten das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y' - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Eigenvektoren.
- Seien $B := A - 2E_2$ und $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $B^k v$ für $k \in \{0, 1, 2\}$.
- Geben Sie ein Fundamentalsystem für das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ an.
- Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.
- Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem zum Anfangswert $y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.