

Blatt 5

Vortragsübung am Mi 18.12.24, Fr 20.12.24

Aufgabe 13

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(X) = (2 - X)^2(3 - X)$.

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay .$$

- (a) Sei $B := A - 2E_3$. Sei $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme das minimale $k \geq 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.
- (c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten und inversen Laplace-Transformierten.

- (a) $\mathcal{L}(3t \sin(t))$
- (b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}\right)$

Aufgabe 15

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' + 9y = \sin(3t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 .$$

Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems.

Bestimmen Sie $f(t)$ mittels Laplace-Transformation und Faltung.