Künzer, Bitzer, Huber, Krauß Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Vortragsübung Mi 29.01.25, Fr 31.01.25

Aufgabe 19 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 3u_{xx}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = u(4,t) = 0, \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } x \in [0,4]\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der ungeraden 8-periodischen Fortsetzung von $u(x,0)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(c) Überprüfen Sie die Lösung $u(x,t)$ aus (b) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = 3u_{xx}$.

Aufgabe 20 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + t$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{für } x \in [0,\pi]$$

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Aufgabe 21 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = 2u_{xx}$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x)$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung, die die obige Anfangsbedingung erfüllt.

(b) Ist die in (a) gefundene Lösung die einzige Lösung?