VÜ 3

A6

homogenes DGL: $y'' + 2y' + y = 0$

char. Polynom: $p(x) = x^2 + 2x^1 + x^0$
$= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

NS bestimmen: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$

Fundalsystem: $f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-x}$, $c_1 \cdot f_1$
$f_2(x) = x \cdot e^{\lambda_2 x} = xe^{-x}$

Probe: $f_1'(x) = -e^{-x}$, $f_1''(x) = e^{-x}$

In DGL einsetzen: $e^{-x} + 2 \cdot (-e^{-x}) + e^{-x} = 0$ ✓

$f_2'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = (-x+1)e^{-x}$

$f_2''(x) = -(x+1)e^{-x} + (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

In DGL einsetzen:

$(x-2)e^{-x} + 2 \cdot (-x+1)e^{-x} + xe^{-x} = 2xe^{-x} - 2xe^{-x}$
$-2e^{-x} + 2e^{-x} = 0$

Fundamentalsystem: $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = xe^{-x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$= c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$

(b) inhomogene DGL:
$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x^2} e^{-x}$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = c_1(x) \cdot f_1(x) + c_2(x) \cdot f_2(x)$
$= c_1(x) \cdot e^{-x} + c_2(x) \cdot xe^{-x}$

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (-x+1)e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{e^{-x} \cdot (-x+1)e^{-x} - xe^{-x} \cdot (-e^{-x})} \begin{pmatrix} (-x+1)e^{-x} & -xe^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cancel{(\;)}\ (-x+1)e^{-2x} + xe^{-2x}} \begin{pmatrix} (-x+1)e^{-x} & -xe^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}$$

$$= \begin{pmatrix} (-x+1)e^{x} & -xe^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x+1)e^{x} & -xe^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -xe^{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-x} \\ e^{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln(|x|) + \underline{c_1} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \underline{c_2} \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

partikuläre Lösung: $y_p(x) = c_1(x) \cdot f_1(x) + c_2(x) \cdot f_2(x)$

Wähle $c_1 = c_2 = 0$:

$$y_p(x) = -\ln(x) \cdot e^{-x} + \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot xe^{-x} = -\ln(x)e^{-x} - e^{-x}$$

$$= (-\ln(x) - 1)e^{-x}$$

Probe: $y_p'(x) = -(-\ln(x) - 1)e^{-x} + \left(-\frac{1}{x}\right)e^{-x} = \left(\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}\right)e^{-x}$

$$y_p''(x) = -\left(\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}$$

$$= \left(-\ln(x) - 1 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x^2} e^{-x}$$

In DGL einsetzen:

$$\left(-\ln(x) - 1 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x} + 2\cdot\left(\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}\right)e^{-x} + \left(-\ln(x) - 1\right)e^{-x}$$

$$= \Big(\underbrace{-2\ln(x) + 2\ln(x)}_{=0} \underbrace{-1 + 2 - 1}_{=0} + \underbrace{2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}}_{=0} + \frac{1}{x^2}\Big)e^{-x}$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{-x} \quad ✓$$

(c) Allgemeine inhomogene Lsg: $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

$$y(x) = \underbrace{(-\ln(x) - 1)e^{-x}}_{y_p(x)} + \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}_{y_h(x)} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(d) $y'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)e^{-x} - (-\ln(x) - 1)e^{-x} + (-c_1 e^{-x}) + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$

$$= \left(-\frac{1}{x} + \ln(x) + 1 - c_1 + c_2 - c_2 x\right) e^{-x}$$

$y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

$$y(1) = (0 - 1)e^{-1} + c_1 e^{-1} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{-1} = (-1 + c_1 + c_2)e^{-1} \overset{!}{=} 1$$

$$y'(1) = \left(-\frac{1}{1} + 0 + 1 - c_1 + c_2 - c_2 \cdot 1\right) e^{-1} = -c_1 e^{-1} \overset{!}{=} 0$$

$$-c_1 e^{-1} = 0 \iff c_1 = 0$$

In die erste Gl einsetzen:

$$(-1 + c_2)e^{-1} = 1 \iff c_2 e^{-1} = 1 + e^{-1} \iff c_2 = \cancel{e^{-1}} \; e + e^{-1} \cdot e$$
$$= e + 1$$

Lösung des AWP:

$$y(x) = (-\ln(x) - 1) e^{-x} + (e+1) x e^{-x}$$

VÜ

A7

Homogene DGL: $y''' - 2y'' + 5y' = 0$

char. Polynom: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$
$= x(x^2 - 2x + 5)$

NS bestimmen: $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$$
$$= 1 \pm 2i$$

Fundamentalsystem: $f_1(x) = e^{0x} = 1$, $f_2(x) = e^{(1+2i)x}$, $f_3(x) = e^{(1-2i)x}$

$f_1(x) = 1$, $\tilde{f}_2(x) = e^{1\cdot x}\cos(2x)$, $\tilde{f}_3 = e^{1\cdot x}\sin(2x)$

Allgemeine homogene Lsg:

$y_h(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^x \cos(2x) + c_3 e^x \sin(2x)$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$
$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$
$ie^{ix} - ie^{-ix} = -2\sin(x)$

$\tilde{f}_3(x) = e^x \sin(-2x)$
$= -e^x \sin(2x)$

(b) partikuläre Lösung: y_p

inhomogene DGL: $y''' - 2y'' + 5y' = 3x = 3x \cdot e^{0x}$

Ansatz der rechten Seite: $y_p(x) = \underbrace{x}_{\text{weil } \lambda_1 = 0 \text{ NS vom char. Poly ist}} \underbrace{(ax + b)}_{\text{weil r.S. } = 3x}$

$y_p(x) = ax^2 + bx$
$y_p'(x) = 2ax + b$
$y_p''(x) = 2a$
$y_p'''(x) = 0$

In DGL einsetzen:

~~0+2(2~~

$$0 - 2 \cdot (2a) + 5 \cdot (2ax + b) = \underbrace{10ax}_{=3} + \underbrace{(5b - 4a)}_{=0} \overset{!}{=} 3x + 0$$

$\boxed{NR:}$ falscher Ansatz: ~~$\tilde{y}_p = ax+b$~~

$$\tilde{y}_p(x) = ax + b$$
$$\tilde{y}_p'(x) = a$$
$$\tilde{y}_p''(x) = 0 \qquad \tilde{y}_p'''(x) = 0$$

In DGL einsetzen:

$$0 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot a = 5a \overset{!}{=} 3x \quad ↯$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a = 3 \\ 5b - 4a = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{10} \\ 5b = 4a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{10} \\ 5b = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{6}{25} \end{array}$$

Also: $y_p(x) = \frac{3}{10} x^2 + \frac{6}{25} x$

(c) Allg. inhomogene Lsg.:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{3}{10} x^2 + \frac{6}{25} x + c_1 + c_2 e^x \cos(2x) + c_3 e^x \sin(2x)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8 VÜ Blatt 3

$$y' - x e^{x+y} = 0$$

$$y' = \underbrace{xe^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)}$$

Also: Separierbare DGL

1. Konstante Lösungen:

$g(y) \overset{!}{=} 0$

Da ~~e^y~~ $g(y) = e^y$ nie null wird gibt es keine konstanten Lösungen.

2. Integrationsmethode:

$$\underbrace{\int \frac{1}{e^y} dy}_{= -e^{-y}} = \underbrace{\int x e^x dx}_{\overset{p.I.}{=} (x-1)e^x + c} \quad , c \in \mathbb{R}$$

TNR:

$$\int u' \cdot v \, dx = [u \cdot v] - \int u \cdot v' dx$$

$u' = e^x \quad v = x$

$$\int x e^x dx = [xe^x] - \int e^x dx = [xe^x - e^x] = (x-1)e^x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -(x-1)e^x - c$$

$$-y = \ln(-(x-1)e^x - c)$$

$$y = -\ln(-(x-1)e^x - c) = \ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^x - c}\right)$$

$y(0) = 0$: $\ln\left(\frac{1}{1-c}\right) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow c = 0$

Lösung: $y(x) = \ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^x}\right)$

Probe: $y(0) = \ln\left(\frac{1}{e^0}\right) = 0$ ✓

$$y'(x) = -\frac{1}{-(x-1)e^x} \cdot \left[1 - (x-1)e^x + (-1)e^x\right] = -1 + \left(-\frac{1}{x-1}\right)$$

In DGL einsetzen:

$$-1-\frac{1}{x-1} - x\cdot e^{x}\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^{x}}\right)} = -1-\frac{1}{x-1} - x\cdot e^{x}\cdot\frac{1}{-(x-1)e^{x}}$$

$$= -\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + x\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1} = 0 \quad ✓$$

Zusatz falls noch Zeit dafür:

Betrachte A7 mit rechter Seite $\cos(x)$ statt $3x$:

$$y''' - 2y'' + 5y' = \cos(x)$$

Ansatz: $y_p = c\,e^{ix}$, $c\in\mathbb{C}$ und DGL $y''' - 2y'' + 5y' = e^{ix}$

$y_p' = ci\,e^{ix}$

$y_p'' = -c\,e^{ix}$

$y_p''' = -ci\,e^{ix}$

Einsetzen gibt

$$-ci\,e^{ix} + 2c\,e^{ix} + 5ci\,e^{ix} \overset{!}{=} e^{ix}$$

$\Leftrightarrow (-ci + 2c + 5ci)\,e^{ix} \overset{!}{=} e^{ix}$

$\Leftrightarrow (2c + 4ci)\,e^{ix} \overset{!}{=} (1 + 0i)\,e^{ix}$

$\Leftrightarrow$ ~~$2c=1,\ 4ci=0i$~~ $2c + 4ci = 1$

$\Leftrightarrow c(2+4i) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2+4i} \Rightarrow f_p = \frac{1}{2+4i}\cdot e^{ix}$

Jetzt noch den Realteil von f_p bestimmen, weil $Re(e^{ix}) = \cos(x)$

$$c = \frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{2-4i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$$

$$f_p = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)\cdot e^{ix} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)$$

$$= \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{5}i\cos(x) + \frac{1}{10}i\sin(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$$

$$y_p = Re(f_p) = \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$$

Probe: $y_p' = -\frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{5}\cos(x)$; $y_p'' = -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$, $y_p''' = \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$

$$y_p''' - 2y_p'' + 5y_p' = \underbrace{\left(\frac{1}{10} + 2\frac{1}{5} - \frac{5}{10}\right)}_{=0}\sin(x) + \underbrace{\left(-\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{10} + 1\right)}_{=1}\cos(x) \quad ✓$$