Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind, und geben Sie gegebenfalls die komplexe Ableitung an:

i) $f(z) = \mathrm{e}^{iz^2}$, **ii)** $g(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$, **iii)** $h(x+iy) = x^2 + iy^2$.

b) Untersuchen Sie, ob zu der Funktion

$$u(x+iy) = x^3 - 6x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

eine Funktion f existieren kann, die holomorph auf $\mathbb{C}$ ist und deren Realteil mit der Funktion u übereinstimmt.

Aufgabe 1.2 Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) \neq 0\} \subset \mathbb{C}$ und

$$f : D \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist und geben sie die komplexe Ableitung $\frac{df}{dz}(z)$ an.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem $z \in D$ lokal biholomorph ist und bestimmen Sie für jedes $z \in D$ die komplexe Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 1.3 Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4, & z \neq 0, \\ f(z) = 0, & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f die Cauchy-Riemann-Gleichungen in $z = 0$ löst und untersuchen Sie die komplexe Differenzierbarkeit von f in $z = 0$.

Aufgabe 1.4 **(a)** Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $f' \in C^0(D, \mathbb{C})$. Beweisen Sie für alle $a, b \in D$, mit $a \neq b$, die durch eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ verbunden werden, die Ungleichung

$$|f(b) - f(a)| \leq \Big(\sup_{z \in \mathrm{Sp}(\gamma)} |f'(z)|\Big) L(\gamma)$$

wobei $\mathrm{Sp}(\gamma) = \gamma([\alpha, \beta])$ ist.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 1.5 *Beweisen Sie:* Sei $f = u + iv$ eine Funktion, die auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorph ist und sei $u = \mathrm{Re}(f)$. Außerdem existiere eine total differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren Gradient in keinem Punkt von $\mathbb{R}^2$ verschwindet und für die $F(u, v) = 0$ auf ganz D gilt. Dann ist f auf D konstant.

Hinweis: Weisen Sie unter Ausnutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen nach, dass alle partiellen Ableitungen von u und v auf D verschwinden.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 20.10.2018 .
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.