

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

- a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls die komplexe Ableitung an:

i)  $f(z) = e^{iz^2}$ ,      ii)  $g(z) = \frac{1}{z}$ ,      iii)  $h(x + iy) = x^2 + iy^2$ .

- b) Untersuchen Sie, ob zu der Funktion

$$u(x + iy) = x^3 - 6x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

eine Funktion  $f$  existieren kann, die holomorph auf  $\mathbb{C}$  ist und deren Realteil mit der Funktion  $u$  übereinstimmt.

**Aufgabe 1.2** Sei  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) \neq 0\} \subset \mathbb{C}$  und

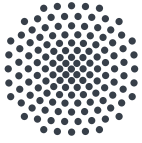
$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  holomorph ist und geben sie die komplexe Ableitung  $\frac{df}{dz}(z)$  an.
- b) Zeigen Sie, dass  $f$  in jedem  $z \in D$  lokal biholomorph ist und bestimmen Sie für jedes  $z \in D$  die komplexe Ableitung der Umkehrfunktion.

**Aufgabe 1.3** Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4, & z \neq 0, \\ f(z) = 0, & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen in  $z = 0$  löst und untersuchen Sie die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z = 0$ .



**Aufgabe 1.4 (a)** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $f' \in C^0(D, \mathbb{C})$ . Beweisen Sie für alle  $a, b \in D$ , mit  $a \neq b$ , die durch eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  verbunden werden, die Ungleichung

$$|f(b) - f(a)| \leq \left( \sup_{z \in \text{Sp}(\gamma)} |f'(z)| \right) L(\gamma)$$

wobei  $\text{Sp}(\gamma) = \gamma([\alpha, \beta])$  ist.

**(b)** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  holomorph. Zeigen Sie, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 1.5** *Beweisen Sie:* Sei  $f = u + iv$  eine Funktion, die auf einem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$  holomorph ist und sei  $u = \text{Re}(f)$ . Außerdem existiere eine total differenzierbare Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Gradient in keinem Punkt von  $\mathbb{R}^2$  verschwindet und für die  $F(u, v) = 0$  auf ganz  $D$  gilt. Dann ist  $f$  auf  $D$  konstant.

*Hinweis:* Weisen Sie unter Ausnutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen nach, dass alle partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  auf  $D$  verschwinden.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 20.10.2018** .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.