Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\textbf{i)}\ \oint\limits_{|z|=1} \overline{z}dz \qquad \textbf{ii)}\ \int\limits_{\gamma} (6z^2 + iz)dz \qquad \textbf{iii)}\ \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos(z^2)}{z-4}dz.$$

Hierbei ist γ eine stückweise C^1-Kurve mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt i.

b) *Beweisen Sie folgende Aussage* (Satz 2.11 aus dem Kurzskript): Sei $D \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^0(D, \mathbb{C})$ und $F : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Dann ist äquivalent:

(i) F ist eine Stammfunktion von f.

(ii) $\mathrm{Re}F$ ist ein Potential von $(\mathrm{Re}f, -\mathrm{Im}f)^T$ und $\mathrm{Im}F$ ist ein Potential von $(\mathrm{Im}f, \mathrm{Re}f)^T$.

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\gamma f(z)dz$$

für die folgenden Wahlen für f und γ:

(i) $f(z) = \mathrm{Re}z$ und $\gamma(t) = t + it^2,\ t \in [0, 1]$,

(ii) $f(z) = e^z$ und γ sei der Polygonzug durch die Punkte 1, $1 + i$ und i (1 sei der Anfangspunkt und i sei der Endpunkt der Kurve).

Aufgabe 2.3 Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_\gamma ze^z dz$, wobei γ gegeben ist durch $\gamma(t) = \frac{t}{2} + i\pi(t-1)^2$ mit $0 \le t \le 2$,

(i) indem Sie eine Stammfunktion von ze^z bestimmen,

(ii) durch Integration auf einem Geradenstück mit Anfangspunkt $i\pi$ und Endpunkt $1 + i\pi$.

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 2.4 Seien $R > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma z^n dz$$

entlang des durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto R \cdot e^{it}$ parametrisierten Weges. In welchen Fällen kann das Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden?

Aufgabe 2.5 Sei $R > 0$ und $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Kurve beschrieben durch $\Gamma(t) = R \cdot e^{it}$. Sei weiter $\gamma := \Gamma|_{[0,\pi]}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i,$$

b) Beweisen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass für alle R groß genung die Ungleichung

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{C}{R}$$

gilt. *Hinweis:* Es gilt $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 27.4.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.