Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben bzw. die Cauchysche Integralformel für die Ableitung, um folgende Integrale zu berechnen.

$$\textbf{i)} \oint\limits_{|z+1|=1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)^2} dz \qquad \textbf{ii)} \oint\limits_{|z-1|=R} \frac{1+e^{2z}}{(z-1)^3} dz,$$

wobei $R > 0$ ist.

b) *Beweisen Sie folgende Aussage* (Satz 2.19 aus dem Kurzskript).

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in C^0(D, \mathbb{C})$ und für jedes kompakte Dreieck $\Delta \subset D$ gelte

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Dann ist f lokal integrierbar.

Aufgabe 3.2 Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale.

$$\textbf{i)} \int\limits_{|z|=4} \frac{1}{3z-2} dz \qquad \textbf{ii)} \int\limits_{|z-2|=2} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz \qquad \textbf{iii)} \int\limits_{|z-1|=2} \exp(z) z^n dz$$

Hinweis: Verwenden Sie für ii) entweder eine Partialbruchzerlegung oder Korollar 2.14 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3.3 Untersuchen Sie, ob es eine holomprphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, deren Realteil mit der Funktion

$$u(x+iy) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$$

übereinstimmt. Geben Sie f und f' gegebenenfalls an.

Aufgabe 3.4 Sei $D \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $v : D \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))^T$ mit $v_1, v_2 \in C^1(D,\mathbb{C})$. *Man zeige:*

Zu v gibt es genau dann ein Potential $\Phi = \mathrm{Re} F$ mit $F : D \to \mathbb{C}$ holomorph, wenn

$$\mathrm{rot} v(x,y) = 0 = \mathrm{div} v(x,y) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in D.$$

Es gilt dann: F ist Stammfunktion von $f := v_1 - iv_2$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 4.5.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.