

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

### Übungsblatt 3

**Aufgabe 3.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

- a) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben bzw. die Cauchysche Integralformel für die Ableitung, um folgende Integrale zu berechnen.

$$\text{i) } \oint_{|z+1|=1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)^2} dz \qquad \text{ii) } \oint_{|z-1|=R} \frac{1+e^{2z}}{(z-1)^3} dz,$$

wobei  $R > 0$  ist.

- b) *Beweisen Sie folgende Aussage (Satz 2.19 aus dem Kurzsript).*

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in C^0(D, \mathbb{C})$  und für jedes kompakte Dreieck  $\Delta \subset D$  gelte

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Dann ist  $f$  lokal integrierbar.

**Aufgabe 3.2** Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale.

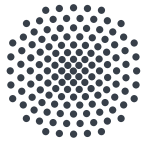
$$\text{i) } \int_{|z|=4} \frac{1}{3z-2} dz \qquad \text{ii) } \int_{|z-2|=2} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz \qquad \text{iii) } \int_{|z-1|=2} \exp(z) z^n dz$$

*Hinweis:* Verwenden Sie für ii) entweder eine Partialbruchzerlegung oder Korollar 2.14 aus der Vorlesung.

**Aufgabe 3.3** Untersuchen Sie, ob es eine holomprphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, deren Realteil mit der Funktion

$$u(x+iy) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$$

übereinstimmt. Geben Sie  $f$  und  $f'$  gegebenenfalls an.



**Aufgabe 3.4** Sei  $D \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $v : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  
 $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))^T$  mit  $v_1, v_2 \in C^1(D, \mathbb{C})$ . Man zeige:

Zu  $v$  gibt es genau dann ein Potential  $\Phi = \operatorname{Re}F$  mit  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, wenn

$$\operatorname{rot}v(x, y) = 0 = \operatorname{div}v(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

Es gilt dann:  $F$  ist Stammfunktion von  $f := v_1 - iv_2$ .

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 4.5.2018** .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.