

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 4.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

- a) Geben Sie das größtmögliche  $r$  an, sodass durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^n z^n$$

eine Funktion  $f$  definiert wird, die im Innern der Kreisscheibe um  $z = 0$  mit Radius  $r$  holomorph ist. Geben Sie die Ableitung von  $f$  an. Gilt  $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ?

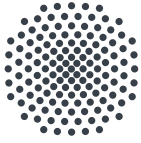
- b) *Zeigen Sie:* Sei  $f$  eine ganze Funktion, und es existiere ein Polynom vom Grad  $n$  mit  $|f(z)| \leq |p(z)|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  ein Polynom, dessen Grad kleiner oder gleich  $n$  ist.

**Aufgabe 4.2** Sei  $z_0 = 4 + 2i$  und  $f : B_1(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{-(n+1)} (z - z_0)^n$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe und setzen Sie  $f$  auf ein größeres Gebiet holomorph fort.
- b) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $f^{(n)}(z_1)/n!$  bei Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $z_1 = 4$  durch Auswertung der Ableitung der Reihe und setzen Sie  $f$  auf ein größeres Gebiet holomorph fort.



**Aufgabe 4.3** a) Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz und nicht konstant. Beweisen Sie, dass dann  $f(\mathbb{C})$  dichte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist, d.h. dass es zu jedem  $w \in \mathbb{C}$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $z \in \mathbb{C}$  gibt, sodass  $|f(z) - w| < \varepsilon$ .

b) Bestimmen Sie  $\exp(\mathbb{C})$ ,  $\cos(\mathbb{C})$  und  $\sin(\mathbb{C})$ .

*Bemerkung:* Tatsächlich ist das Bild einer ganzen, nicht-konstanten Funktion die gesamte komplexe Zahlenebene, aus der höchstens ein Punkt herausgenommen wurde. Dieser Sachverhalt ist als kleiner Satz von Picard bekannt.

**Aufgabe 4.4** Wenden Sie den Cauchyschen Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken  $\pm a$ ,  $\pm a + ib$  ( $a, b > 0$ ) und die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \exp(-z^2)$  an, um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass bei festem  $b$  die Integrale über die vertikalen Seiten des Rechtecks im Limes  $a \rightarrow \infty$  gegen null konvergieren. Außerdem dürfen Sie verwenden, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Aufgabe 4.5** In dieser Aufgabe soll der Fundamentalsatz der Algebra direkt aus dem Cauchyschen Integralsatz hergeleitet werden. Sei dazu  $p$  ein nicht-konstantes komplexes Polynom,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (a_\nu \in \mathbb{C}),$$

mit  $n \geq 1$  und  $a_n \neq 0$ . Man nehme an, dass  $p$  keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  besitze. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme

$$\int_{|z|=r} \frac{a_0}{z p(z)} dz = 2\pi i \tag{1}$$

mit  $r > 0$  beliebig. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

*Hinweis:* Für den Nachweis von (1) betrachte man die Funktion  $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h(z) = \frac{a_0}{z p(z)} - \frac{1}{z}.$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

**Freitag, den 11.5.2018 .**

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.