

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (schriftlich, 4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Laurentreihen der folgenden Funktionen um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und geben Sie deren Konvergenzbereich an.

$$\text{i) } f(z) = \frac{\sin z}{z^4} \quad \text{ii) } g(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)} \quad \text{iii) } h(z) = z^3 e^{z+4}$$

- b) *Zeigen Sie:* Sei f eine ganze Funktion, und es gelte $f(z) = f(\frac{1}{z})$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist f konstant.

Hinweis: Was lässt sich über die Laurentreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ aussagen?

Aufgabe 5.2 Entwickeln Sie die Funktion f mit $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)}$ um den Punkt $z_0 = 1$ jeweils so in eine Laurentreihe, dass die jeweilige Reihe in

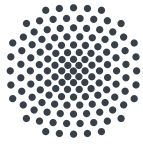
$$\text{i) } z = \frac{1}{2} \quad \text{ii) } z = \frac{i}{2} \quad \text{iii) } z = 2i$$

konvergiert. Welches sind die Konvergenzbereiche dieser Reihen?

Aufgabe 5.3 Welches sind die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, und von welcher Art sind sie? Geben Sie bei den Polen auch die Ordnung mit an.

$$\text{i) } \frac{1}{z(z-2)^2} \quad \text{ii) } \frac{1}{e^{i\pi z} - 1} \quad \frac{\cos z - 1}{z^4}.$$

Aufgabe 5.4 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität in a . *Man zeige:* Ist a nicht hebbar, so ist a eine wesentliche Singularität von $g(z) = \exp(f(z))$.



Aufgabe 5.5 Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. *Man beweise die folgenden drei Aussagen:*

- a) f hat in z_0 eine hebbare Singularität genau dann, wenn f^2 in z_0 eine hebbare Singularität hat.
- b) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung k genau dann, wenn f^2 in z_0 einen Pol der Ordnung $2k$ hat.
- c) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität genau dann, wenn f^2 in z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 18.5.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.