

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 6.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie mittels des Residuensatzes:

$$\text{i) } \oint_{|z|=2} \frac{z+1}{4z^3+4z^2+z} dz \quad \text{ii) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz \quad \text{iii) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx.$$

*Hinweis:*  $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ .

b) Zeigen Sie: Sei  $w \in \mathbb{C}$  und  $f$  und  $g$  holomorph auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-w| < 1\}$ . Dann gilt:  $\operatorname{Res}(\alpha f + \beta g, w) = \alpha \operatorname{Res}(f, w) + \beta \operatorname{Res}(g, w)$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

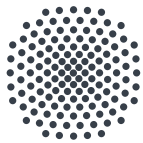
**Aufgabe 6.2** Zeigen Sie: Sei  $f$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph außer an endlich vielen Polstellen. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  eine geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma|_{[a, b]}$  injektiv, die alle Null- und Polstellen von  $f$  umschließt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f) - P(f) \quad (1)$$

wobei  $N(f)$  die Anzahl der Nullstellen, jeweils multipliziert mit ihrer Vielfachheit, und  $P(f)$  die Anzahl der Polstellen, jeweils multipliziert mit ihrer Ordnung.

**Aufgabe 6.3** Berechnen Sie:

$$\text{i) } \oint_{|z|=1} z e^{\frac{3}{z}} dz \quad \text{ii) } \oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=2} \frac{\cos(z^2) - 1}{\sin(z)} dz \quad \text{iii) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^4 + 4} dx$$



**Aufgabe 6.4** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $|a| > 0$  und  $|b| > 1$ . Berechnen Sie:

i)  $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx$     ii)  $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$     iii)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{b+\cos x} dx$

**Aufgabe 6.5** Bestimmen Sie die Art der Singularität der Funktion  $f$  im Punkt  $z_0$  und berechnen Sie den Wert des jeweiligen Residuums im Punkt  $z_0$ .

a)

$$f(z) = \frac{z^3 + 3z - 2i}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i,$$

b)

$$f(z) = \frac{z^2(z - \pi)}{(1 - e^{iz}) \sin z}, \quad z_0 = 0,$$

c)

$$f(z) = \exp(\exp(-1/z)), \quad z_0 = 0.$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 1.6.2018** .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.