Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (schriftlich, 4 Punkte)

(a) Sei $X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, $a \in X$ und $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch $\mu_a(E) = 1$, falls $a \in E$, und $\mu_a(E) = 0$, falls $a \notin E$.
Zeigen Sie: μ_a ist ein Prämaß auf $\mathcal{P}(X)$.

(b) Zeigen Sie: Sei μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$, dann gilt:

(i)

$$\forall A, B \in \mathcal{R} : \ \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(ii)

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} \ \text{ mit } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Aufgabe 7.2 **(a)** Sei X eine Menge und $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ordne jeder Menge $E \in \mathcal{P}(X)$ die Anzahl ihrer Elemente zu. Zeigen Sie, dass μ ein Prämaß auf $\mathcal{P}(X)$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle Abbildungen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$, für die μ ein Prämaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist.

Aufgabe 7.3 Zeigen Sie: Das Lebesguesche äußere Maß $(\lambda^n)^*$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist translations-invariant, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und $A_x = \{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in A\}$ gilt: $(\lambda^n)^*(A_x) = (\lambda^n)^*(A)$.

Aufgabe 7.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Für jede Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei

$$\mu^*(A) := \sup \Big\{ \{0\} \cup \{|f(x)| : x \in A\} \Big\}.$$

Zeigen Sie: μ^* ist ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Welche Teilmengen sind μ^*-messbar für den Fall $f(x) = \sin x$?

Aufgabe 7.5 **(a)** Sei $X \neq \emptyset$, μ ein Inhalt auf $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und μ^* das äußere Maß zu μ. Zeigen Sie: Jede μ-Nullmenge ist μ^*-messbar.

(b) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}^2$ der Ring der 2-dimensionalen Figuren und λ^2 der 2-dimensionale Jordansche Inhalt. Zeigen sie: Jeder nach links halboffene Quader im $\mathbb{R}^2$ ist $(\lambda^2)^*$-messbar.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe der Definition von $(\lambda^2)^*$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 8.6.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.