Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Sei $X \neq \emptyset$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Seien Σ_i, $i \in I \neq \emptyset$, σ-Algebren auf X. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \Sigma_i := \{A \subseteq X : \forall i \in I : A \in \Sigma_i\}$$

eine σ-Algebra auf X.

(ii) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\Sigma_{\mathcal{M}} := \{\Sigma \supseteq \mathcal{M} : \Sigma \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X\}$. Dann ist

$$\Sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\Sigma \in \Sigma_{\mathcal{M}}} \Sigma$$

eine σ-Algebra auf X.

(iii) Für $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ ist $\Sigma(\mathcal{M}_0) \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$

b) Bestimmen Sie für $X := \{1, 2, 3, 4\}$ die von

$$\mathcal{M}_1 := \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_2 := \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

erzeugten σ-Algebren.

Aufgabe 8.2 Beweisen Sie:

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, $\Sigma_A := \{A \cap B : B \in \Sigma\}$ und $\mu_A : \Sigma_A \to [0, \infty]$ mit $\mu_A(C) = \mu(A \cap B)$ für $C = A \cap B$. Dann ist (A, Σ_A, μ_A) ein Maßraum.

Aufgabe 8.3 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Beweisen Sie:

a) Jede messbare Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

b) Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

c) Sei $\tilde{\Sigma} := \{A \cup M : A \in \Sigma, M \subseteq N, N \in \Sigma \wedge \mu(N) = 0\}$ und $\tilde{\mu} : \tilde{\Sigma} \to [0, \infty]$ mit $\tilde{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$ für $A \in \Sigma$ und $M \subseteq N$ mit $N \in \Sigma$ und $\mu(N) = 0$. Dann ist $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Aufgabe 8.4 Ein beschränkter Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist das kartesische Produkt $Q = \prod_{j=1}^n I_j$ von beschränkten Intervallen $I_j \subset \mathbb{R}$. Die Länge eines beschränkten Intervalls $I \in \{[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)\}$ für geeignete $-\infty < a < b < \infty$ ist $|I| = b - a$. Beweisen Sie:

a) Jeder beschränkte Quader ist $(\lambda^n)^*$-messbar.

b) Für jeden beschränkten Quader $Q = \prod_{j=1}^n I_j$ gilt $\lambda^n(Q) = \prod_{j=1}^n |I_j|$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.34 und geeignete Nullmengen.

Aufgabe 8.5 Sei $\Sigma = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ oder $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

a) Σ ist translationsinvariant, d.h., es gilt:
$A \in \Sigma$ und $x \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow A + x := \{a + x : \, a \in A\} \in \Sigma$,

b) λ^n ist translationsinvariant auf Σ, d.h., es gilt:
$\forall A \in \Sigma \, \forall x \in \mathbb{R}^n : \, \lambda(A + x) = \lambda(A)$,

c) Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf Σ mit $\mu((0,1]^n) = c < \infty$, dann ist $\mu = c\lambda^n$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 15.6.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.