Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ e^x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Integral $\int\limits_{[0,1]} g \, d\mu$ für $\mu = \lambda^1$.

b) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann integrierbar, wenn f Borelmessbar und $|f|$ integrierbar ist.

(ii) Ist f integrierbar, dann ist f fast überall endlich.

Aufgabe 9.2 Seien (X_k, Σ_k), $k = 1, 2, 3$, messbare Räume. Beweisen Sie:

a) Ist $f_1 : X_1 \to X_2$ eine Σ_1-Σ_2-messbare Funktion und $f_2 : X_2 \to X_3$ eine Σ_2-Σ_3-messbare Funktion, dann ist $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ eine Σ_1-Σ_3-messbare Funktion.

b) Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann ist f $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar.

Aufgabe 9.3 Sei (X, Σ) ein messbarer Raum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei borel-messbare Funktionen. Zeigen Sie: Dann sind auch $\alpha \cdot f$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $f \pm g$ (sofern überall definiert), $1/f$ (sofern $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$), $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$ und $|f|$ borel-messbare Funktionen.

Aufgabe 9.4 Sei $\mu = \lambda^1$ und $f(x) = x^3$. Bestimmen Sie $\int_0^1 f d\mu$ mithilfe der Definition des Lebesgue-Integrals.

Aufgabe 9.5 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar mit

$$\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

(ii) Ist $f \leq g$, dann ist

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 22.6.2018 .
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.