Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten Konvergenzsatzes den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + n \cdot x^3}\, dx.$$

b) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbare Funktionen mit $f_n \uparrow f$, wobei f μ-integrierbar sei. Außerdem existiere eine μ-integrierbare Funktion $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und sei $f_n \geq -\varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Bemerkung: Die verwendete Schreibweise $f_n \uparrow f$ bedeutet, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ und $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in X$ und $n \geq 1$.

Aufgabe 10.2 Seien f_n integrierbare Funktionen auf einem Maßraum (X, Σ, μ), und gelte $f_n \uparrow f$. Zeigen Sie: Falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu < \infty$, ist auch f integrierbar und

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu.$$

Aufgabe 10.3 Seien $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein auf der Borelalgebra definiertes Maß und $\lambda^1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ das eindimensionale Lebesguemaß. Weiter gelte für alle $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ (f ist stetig und hat kompakten Träger), dass $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda^1$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\mu = \lambda^1$.

Hinweis: Approximieren Sie charakteristische Funktionen χ_I, wobei I beschränkte halboffene Intervalle sind, durch Funktionen aus $C_c^0(\mathbb{R})$.

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 10.4 **a)** Sei $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ mit $f(k) := a_k$ und sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. $\mu(M) := |M|$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu.$$

b) Sei $a_{k,l} \geq 0$ für alle $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Zeigen Sie mithilfe eines der Konvergenzsätze, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

c) Sei $a_{k,l} \in \mathbb{R}$ für alle $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ und gelte $\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{k,l}| < c$ für ein $c > 0$ und alle $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini-Tonelli, dass dann die Reihe $\sum_{k,l} a_{k,l}$ absolut konvergiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

Aufgabe 10.5 Beweisen Sie (mithilfe des Satzes von Tonelli) Korollar 8.10 aus dem Kurzskript:

Sei (X, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ Borelmessbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) \geq y\} \, dy \\ &= \mu \otimes \lambda^1(\{(x,y) \in X \times \mathbb{R}_0^+ : 0 \leq y \leq f(x)\}). \end{aligned}$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 29.6.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.