

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 10.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

a) Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten Konvergenzsatzes den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + n \cdot x^3} dx.$$

b) Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Borel-messbare Funktionen mit  $f_n \uparrow f$ , wobei  $f$   $\mu$ -integrierbar sei. Außerdem existiere eine  $\mu$ -integrierbare Funktion  $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und sei  $f_n \geq -\varphi$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

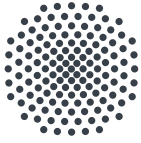
*Bemerkung:* Die verwendete Schreibweise  $f_n \uparrow f$  bedeutet, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  für alle  $x \in X$  und  $n \geq 1$ .

**Aufgabe 10.2** Seien  $f_n$  integrierbare Funktionen auf einem Maßraum  $(X, \Sigma, \mu)$ , und gelte  $f_n \uparrow f$ . Zeigen Sie: Falls  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < \infty$ , ist auch  $f$  integrierbar und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.$$

**Aufgabe 10.3** Seien  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ein auf der Borelalgebra definiertes Maß und  $\lambda^1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  das eindimensionale Lebesguemaß. Weiter gelte für alle  $f \in C_c^0(\mathbb{R})$  ( $f$  ist stetig und hat kompakten Träger), dass  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda^1$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:  $\mu = \lambda^1$ .

*Hinweis:* Approximieren Sie charakteristische Funktionen  $\chi_I$ , wobei  $I$  beschränkte halboffene Intervalle sind, durch Funktionen aus  $C_c^0(\mathbb{R})$ .



**Aufgabe 10.4** a) Sei  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $f(k) := a_k$  und sei  $\mu$  das Zählmaß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , d.h.  $\mu(M) := |M|$ . Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int_{\mathbb{N}} f d\mu.$$

b) Sei  $a_{k,l} \geq 0$  für alle  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ . Zeigen Sie mithilfe eines der Konvergenzsätze, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

c) Sei  $a_{k,l} \in \mathbb{R}$  für alle  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  und gelte  $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |a_{k,l}| < c$  für ein  $c > 0$  und alle  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini-Tonelli, dass dann die Reihe  $\sum_{k,l} a_{k,l}$  absolut konvergiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

**Aufgabe 10.5** Beweisen Sie (mithilfe des Satzes von Tonelli) Korollar 8.10 aus dem Kurzsript:

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  Borelmessbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) \geq y\}) dy \\ &= \mu \otimes \lambda^1(\{(x, y) \in X \times \mathbb{R}_0^+ : 0 \leq y \leq f(x)\}). \end{aligned}$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

**Freitag, den 29.6.2018 .**

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.