Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Seien $f, g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen, $F(t) := \int_{[a,t]} f \, d\lambda^1$ und $G(t) := \int_{[a,t]} g \, d\lambda^1$, $t \in [a,b]$. Man zeige:

$$\int_{[a,b]} f \cdot G \, d\lambda^1 + \int_{[a,b]} F \cdot g \, d\lambda^1 = F(b) \cdot G(b).$$

b) Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass für $1 \le p < q \le \infty$ gilt $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ und dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass gilt:

$$\forall f \in L^q(\Omega) : \ ||f||_{L^p} \le C ||f||_{L^q}.$$

Aufgabe 11.2 Berechnen Sie den Grenzwert des Integrals

$$I(R) = \int_{[0,R]} \frac{\sin x}{x} d\lambda^1(x)$$

für $R \to \infty$. Warum kann man $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ im Lebesgue'schen Sinne nicht direkt über $\mathbb{R}_0^+$ integrieren?

Hinweis: Um $I(R)$ zu berechnen, schreibt man $\frac{1}{x} = \int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-ux} d\lambda^1(u)$ und überlegt sich, warum die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist.

Aufgabe 11.3 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie: Auf $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist durch $f \sim g :\Leftrightarrow \mathcal{N}_p(f - g) = 0$ eine Äquivalenzrelation definiert und es gilt $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-fast überall.

Bemerkung: $\mathcal{N}_p(f) := \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$.

Aufgabe 11.4 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $m \in \mathbb{N}$. Seien weiter $p_j \in [1, \infty]$, $j = 1, \dots, m$, $\frac{1}{r} := \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$ und $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$ für alle $j = 1, \dots, m$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$i) \quad \prod_{j=1}^m f_j \in L^r(\Omega) \qquad\qquad ii) \quad \left|\left| \prod_{j=1}^m f_j \right|\right|_{L^r} \le \prod_{j=1}^m ||f_j||_{L^{p_j}}.$$

Aufgabe 11.5 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt endliche Maßräume, für die $L^q(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$ (echte Inklusion) gilt.

b) Ist $\mu(\Omega) = \infty$, so muss $L^q(\Omega)$ keine Teilmenge von $L^p(\Omega)$ sein.

c) Seien $s \in (p, q)$, $\theta \in (0, 1)$ mit $\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ und sei $f \in L^q(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Dann gilt:

$$i) \quad f \in L^s(\Omega) \qquad\qquad ii) \quad ||f||_{L^s} \leq ||f||_{L^p}^{\theta} \cdot ||f||_{L^q}^{1-\theta}.$$

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 6.7.2018 .
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.