Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

**Höhere Analysis**
**Vorlesung im Sommersemester 2018**

# Übungsblatt 12

**Aufgabe 12.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

**a)** Zeigen Sie:

**i)** Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^3(\mathbb{R}^n)$ und $h \in L^6(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \cdot g \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

**ii)** Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $(f * g) \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

**b)** Seien $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Faltung gilt:

**i)** $f * g = g * f$ (Kommutativität)

**ii)** $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativität)

**Aufgabe 12.2** Sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum.

**a)** Finden Sie eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$, aber

$$\int_X f \, d\mu > \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

*Bemerkung:* Das zeigt, dass die Positivität im Lemma von Fatou notwendig ist.

**b)** Geben Sie eine Folge beschränkter nicht-negativer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ an, die *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert und für die $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existiert, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \neq \int_X f \, d\mu.$$

Was passiert unter den selben Voraussetzungen im Fall $\mu(X) < \infty$?

**c)** Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^1((0, \infty))$ gilt

$$\liminf_{x\to\infty} |f(x)| = 0.$$

Gilt auch $\limsup\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

**Aufgabe 12.3** Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die

**i)** Zeigen Sie, dass die Funktion $y \mapsto f(x-y)g(y)$ für $\lambda^n$-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar ist.

**ii)** Zeigen Sie, dass die Faltung $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

*Bemerkung:* Aufgaben 12.1 (b) und 12.3 beweisen Lemma 9.12 aus dem Kurzskript.

**Aufgabe 12.4** Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, dass

$$||f_h - f||_{L^p} \to 0 \qquad (h \to 0),$$

wobei $f_h(x) := f(x-h)$ für alle $x, h \in \mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Verwenden Sie Satz 9.10.

**Aufgabe 12.5** Sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum, $f \in L^p(X)$ mit $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty]$ der zu $p$ duale Exponent, definiert durch $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Zeigen Sie, dass

$$||f||_{L^p} = \sup \left\{ \left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| : ||g||_{L^q} \leq 1 \right\}.$$

*Hinweis:* Für die Richtung $||f||_{L^p} \geq \sup\{...\}$ verwende man die Hölder-Ungleichung. Für die andere Richtung sucht man ein geeignetes $h$ mit $||f||_{L^p} = \left| \int f \cdot h \, d\mu \right|$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

**Freitag, den 13.7.2018** .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.