

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Übungsblatt 12

### Aufgabe 12.1 (schriftlich, 4 Punkte)

- a) Zeigen Sie:
- i) Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^3(\mathbb{R}^n)$  und  $h \in L^6(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $f \cdot g \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .
  - ii) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $(f * g) \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .
- b) Seien  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Faltung gilt:
- i)  $f * g = g * f$  (Kommutativität)
  - ii)  $(f * g) * h = f * (g * h)$  (Assoziativität)

### Aufgabe 12.2 Sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum.

- a) Finden Sie eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  für alle  $x \in X$ , aber

$$\int_X f \, d\mu > \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

*Bemerkung:* Das zeigt, dass die Positivität im Lemma von Fatou notwendig ist.

- b) Geben Sie eine Folge beschränkter nicht-negativer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  an, die *gleichmäßig* gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$  existiert, aber

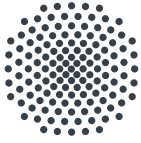
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \neq \int_X f \, d\mu.$$

Was passiert unter den selben Voraussetzungen im Fall  $\mu(X) < \infty$ ?

- c) Zeigen Sie, dass für alle  $f \in L^1((0, \infty))$  gilt

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0.$$

Gilt auch  $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel)



**Aufgabe 12.3** Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die

- i) Zeigen Sie, dass die Funktion  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  für  $\lambda^n$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  Lebesgue-integrierbar ist.
- ii) Zeigen Sie, dass die Faltung  $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-integrierbar ist.

*Bemerkung:* Aufgaben 12.1 (b) und 12.3 beweisen Lemma 9.12 aus dem Kurzsript.

**Aufgabe 12.4** Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $p \in [1, \infty]$ . Zeigen Sie, dass

$$\|f_h - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

wobei  $f_h(x) := f(x - h)$  für alle  $x, h \in \mathbb{R}^n$ . *Hinweis:* Verwenden Sie Satz 9.10.

**Aufgabe 12.5** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f \in L^p(X)$  mit  $p \in [1, \infty]$  und  $q \in [1, \infty]$  der zu  $p$  duale Exponent, definiert durch  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_{L^p} = \sup \left\{ \left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| : \|g\|_{L^q} \leq 1 \right\}.$$

*Hinweis:* Für die Richtung  $\|f\|_{L^p} \geq \sup\{\dots\}$  verwende man die Hölder-Ungleichung. Für die andere Richtung sucht man ein geeignetes  $h$  mit  $\|f\|_{L^p} = \left| \int f \cdot h \, d\mu \right|$ .

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

**Freitag, den 13.7.2018 .**

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.