Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1 Man betrachte die Funktionen $f, h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x^2$ und $x \mapsto h(x) = |\sin x|$.

a) Berechnen Sie für f und h jeweils die Fourierkoeffizienten a_k und b_k.

b) Untersuchen Sie die in a) erhaltenen Fourierreihen auf punktweise Konvergenz gegen die Funktionswerte $f(x)$ bzw. $h(x)$.

c) Verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse für f, um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

d) Geben Sie die Bestapproximation von f in dem von den Funktionen

$$g_1(x) = \pi^{-1/2} \cos x \quad \text{und} \quad g_2(x) = \pi^{-1/2} \cos(2x)$$

aufgespannten Unterraum in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ an.

Aufgabe 13.2 Sei $a > 0$.

a) Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformation der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in [-a, a]$ und $f(x) = 0$ sonst, sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \exp(-a|x|)$.

b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus a), um folgende Integrale zu berechnen:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}\, dx = \pi a$ **ii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}.$

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 13.3 **a)** Seien $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ reellwertig und $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x, t)$. Man nehme an, dass $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$ und $u(x, \cdot) \in C^1([0, \infty))$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem nehme man an, dass u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

sei mit $u(\cdot, 0) = u_0$. Zeigen Sie mithilfe der Fouriertransformation bzgl. der Koordinate x, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \frac{(x-y)^2}{4t} \Big) u_0(y)\, dy$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Hinweis: Sie dürfen die Regeln zur Differentiation von parameterabhängigen Integralen verwenden (siehe z.B. Vortragsübung 7.4).

b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation die Rotationssymetrie einer Funtion erhält, d.h., dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ mit $f(Rx) = f(x)$ für alle $R \in SO(3)$ und alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(Rk)$ für alle $R \in SO(3)$ und alle $k \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und f' bezeichne die Ableitung von f. Zeigen Sie, dass es von der Wahl von f unabhängige Konstanten $C, D > 0$ gibt, sodass

a)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq C \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{4}} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{4}},$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq D \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{4}} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} x^2 \; |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{4}}.$$

Hinweis: Für a) betrachte man das Supremum von $f(x)^2$. Eine geeignete Abschätzung dafür erhält man mithilfe des Hauptsatzes der Differential-und Integralrechnung und der Hölderschen Ungleichung. Um b) nachzuweisen, drücke man die linke Seite durch die Fouriertransformierte von f aus und wende darauf das Ergebnis aus a) an.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 20.7.2018 .

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.