Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Die *gebrochen linearen Funktionen* oder auch *Möbiustransformationen* sind Abbildungen von der Form

$$f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,, \text{ wobei } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ mit } \det M \neq 0\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$f_M\colon \mathbb{C}\setminus N \to f_M(\mathbb{C}\setminus N)$$

lokal biholomorph ist, wobei N die Mengen der Nullstellen des Nenners ist.

Aufgabe 1.2 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$.

Die Abbildung f heißt *orientierungserhaltend*, wenn sie offen und partiell differenzierbar ist, sowie die Eigenschaft

$$\partial_x u(x,y)\partial_y v(x,y) - \partial_y u(x,y)\partial_x v(x,y) > 0$$

erfüllt, wobei stets $\mathbb{C} \ni (x + \mathrm{i}y) \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Abbildung f heißt *winkeltreu*, wenn sie Paare von reguläre C^1-Kurven c_1, c_2 in D, die sich in einem $z_0 \in D$ unter einem Winkel α schneiden, auf zwei Kurven γ_1, γ_2 in $f(D)$ abbildet, die sich in $f(z_0)$ ebenfalls unter dem Winkel α schneiden.

Die Abbildung f heißt *konform*, wenn sie winkeltreu und orientierungserhaltend ist.

Sei f holomorph, mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass f konform ist.

Aufgabe 1.3 Für einige Anwendungen ist es zweckmäßig die komplexe Ebene um einen zusätzlichen Fernpunkt „∞“ zu erweitern. Die *riemannsche Zahlenkugel* ist definiert durch $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wir treffen die folgenden Konventionen:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z &= \infty\,, \quad \frac{z}{\infty} = 0\,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \\ z \cdot \infty = \infty \cdot z &= \infty\,, \quad \frac{z}{0} = \infty\,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,, \text{ sowie} \\ \infty \cdot \infty = \infty &= \overline{\infty}\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Ausdrücke $0 \cdot \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ undefiniert bleiben.

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

a) Beweisen Sie: Jede Möbiustransformation f_M lässt sich als Komposition von grundlegenen Transformation

$$\tau\colon z \mapsto \frac{1}{z}\,, \quad M_\alpha z \mapsto \alpha z \quad \text{und} \quad T_\beta z \mapsto z + \beta$$

mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ darstellen.

Mit den oben genannten Konventionen lassen sich diese grundlegenen Transformationen und somit auch die Möbiustransformationen zu bijektiven Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen. Dabei $f_M(-d/c) = \infty$ und $f_M(\infty) = a/c$ für f_M aus (1).

b) Zeigen Sie, dass Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ genau die Lösungsmengen von Gleichungen der Form

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{2}$$

mit $A, C \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{C}$, $AC < |B|^2$ sind.

c) Jede Gerade in $\hat{\mathbb{C}}$ besteht aus einer Geraden in $\mathbb{C}$ vereinigt mit $\{\infty\}$. In diesem Sinne stellen sie Kreise mit unendlich großem Radius dar. Eine Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ heißt verallgemeinerter Kreis, wenn ihre Einschränkung auf $\mathbb{C}$ ein Kreis oder eine Gerade ist.

Beweisen Sie, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbilden. Zeigen Sie dafür die Behauptung zuerst für $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am

Dienstag, den 17.4.2018

in der Vortragsübung besprochen.