Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 2

Aufgabe 2.1 In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass alle Möbiustransformationen eindeutig durch die Angabe der Bilder dreier Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ bestimmt werden. Die Definition von Möbiustransformationen und der riemannschen Zahlenkugel sind auf dem letzten Übungsblatt zu finden.

a) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation, welche ein gegebenes Tripel (z_1, z_2, z_3) aus paarweise verschiedenen Elementen aus $\hat{\mathbb{C}}$ auf das Tripel $(0, 1, \infty)$ abbildet, eindeutig durch

$$\phi_{z_1,z_2,z_3}(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3} \tag{1}$$

für $z_3 \neq z \neq \infty$ gegeben ist. Hierbei ist der Ausdruck (1) durch den entsprechenden Limes $|z_j| \to \infty$ zu ersetzen, falls ∞ das j-te Element des Ausgangstripels ist.

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Tripel (w_1, w_2, w_3) aus paarweise verschiedenen Elementen aus $\hat{\mathbb{C}}$ genau eine Möbiustransformation ψ gibt, so dass $\psi(0) = w_1$, $\psi(1) = w_2$ und $\psi(\infty) = w_3$.

Aufgabe 2.2 Es seien $\mathbb{S}^2 := \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}$ und $p\colon \mathbb{S}^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die stereografische Projektion mit

$$p(z,t) := \begin{cases} \frac{z}{1-t}\,, & \text{für } t \neq 1 \\ \infty\,, & \text{für } t = 1 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(0, 1)$, (w, t) und $(p(w, t), 0)$ für $(w, t) \neq (0, 1)$ auf einer Gerade liegen.

b) Beweisen Sie die Bijektivität von p, sowie

$$p^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\,, & \text{für } z \neq \infty \\ (0,1)\,, & \text{für } z = \infty\,. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass $d(z, w) := |p^{-1}(z) - p^{-1}(w)|$ eine Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ definiert. Beweisen Sie anschließend, dass für eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$d(z_n, z) \to 0\,, \quad (n \to \infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad |z - z_0| \to 0\,, \quad (n \to \infty)$$

und $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Metrik d kompakt ist.

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 2.3 Bestimmen Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

für die folgenden Wahlen von f und γ

a) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\colon t \mapsto 1/z$ und $\gamma\colon [0,8\pi] \to \mathbb{C}\colon \gamma(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$,

b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon f(z) := z\sin(z)$ und $\gamma\colon [0,5\pi] \to \mathbb{C}\colon \gamma(t) := t\,\mathrm{e}^{\frac{4}{5}\mathrm{i}t}\ln(e + t(5\pi - t))$.

Aufgabe 2.4 **a)** Sei $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \le \arg(\alpha) \le \frac{\pi}{4}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei diese Integrale als Grenzwerte $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \ldots \mathrm{d}t$ zu verstehen sind.
Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral von $f(z) = e^{-z^2}$ längs des Randes des Sektors $S_R := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le |z| \le R \text{ und } 0 \le \arg(z) \le \arg(\alpha)\}$.

b) Berechnen Sie die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

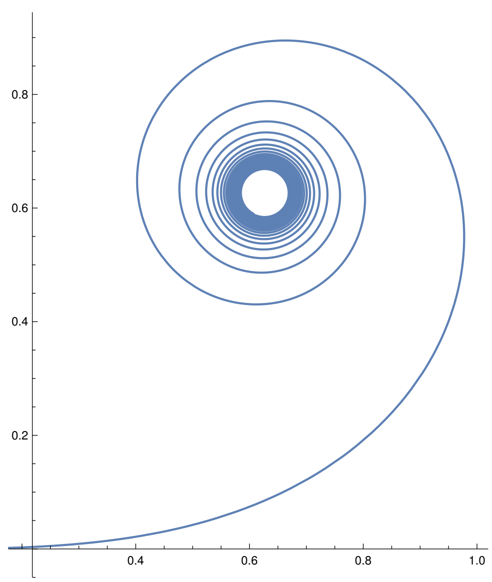

Abbildung 1: Die Kurve $s \mapsto \int_0^s \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^s \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ für $s \in [0, 10]$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 24.4.2018
in der Vortragsübung besprochen.