Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 3

Aufgabe 3.1 Entscheiden Sie, ob jeweils eine Funktion f existiert, welche in $B_1(0)$ holomorph ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt. Berechnen Sie f' im Falle ihrer Existenz.

a) $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

b) $f^{(n)}(0) = 2^n \cdot n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$

c) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3.2 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $k \in \mathbb{N}_0$.

Ein Punkt $z_0 \in U$ heißt *k-fache Nullstelle* von f, wenn eine weitere holomorphe Funktion g auf U existiert mit

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z - z_0)^k g(z) \text{ für alle } z \in U\,.$$

Beweisen Sie: f hat in z_0 genau dann eine k-fache Nullstelle, wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0\,.$$

Aufgabe 3.3 Beweisen Sie: Es sei f eine auf dem Abschluss eines beschränkten Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ stetige und nicht-konstante Funktion, welche auf G holomorph sei. Außerdem sei $|f|$ auf dem Rand von G konstant. Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle in G.

Hinweis: Führen Sie einen indirekten Beweis und wenden Sie das Maximumprinzip auf die Funktion $\frac{1}{f}$ an.

Aufgabe 3.4 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und spiegelungssymmetrisch bezüglich der x-Achse und sei ihr Schnitt mit der oberen Halbebene durch $D_+ := \{z \in D \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ definiert. Sei $f\colon D_+ \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf $\mathring{D}_+$ und sei $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z)\,, & \text{für } z \in D_+ \\ \overline{f(\bar{z})}\,, & \text{für } \bar{z} \in D_+ \end{cases}$$

die eindeutige holomorphe Fortsetzung von f auf D ist.

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 3.5 **a)** Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

für $\operatorname{Re} z > 1$ definiert und analytisch ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \, ,$$

wobei $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ die Folge der Primzahlen ist.

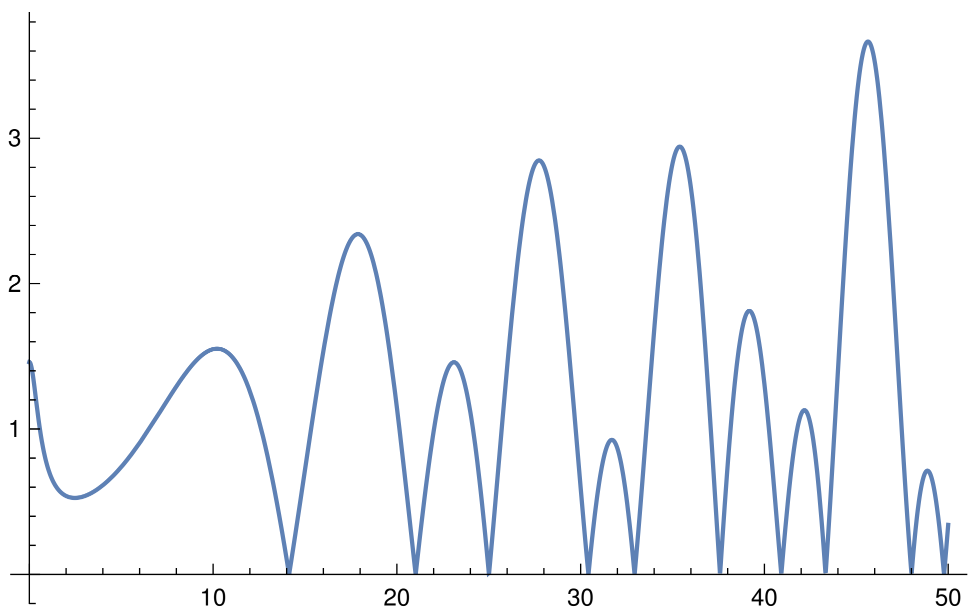

Abbildung 1: Die Zetafunktion kann zu einer analytischen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einem Pol in 1 fortgesetzt werden. Hier ist $t \mapsto |\zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t)|$ für $t \in [0, 50]$ zu sehen. Die bis heute weder bewiesene noch widerlegte Riemannsche Vermutung besagt, dass alle Nullstellen der Zetafunktion in dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1\, ,\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ auf der Gerade $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\mathbb{R}$ liegen.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 8.5.2018
in der Vortragsübung besprochen.