Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

**Höhere Analysis**
**Vorlesung im Sommersemester 2018**

# Vortragsübungsblatt 4

**Aufgabe 4.1** **a)** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2}$$

in Laurentreihen, die jeweils auf den folgenden Gebieten konvergieren:

(i) $B_1(0) \setminus \{0\}$ (ii) $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ (iii) $B_2(\mathrm{i}) \setminus \overline{B_1(\mathrm{i})}$ (iv) $B_1(\mathrm{i}) \setminus \{\mathrm{i}\}$

**b)** Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete der folgenden Laurentreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n}+e^{-\alpha n}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+2}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\,(z+2)^n$

**Aufgabe 4.2** Klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, welche alle auf $\mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z})$ definiert seien.

**a)** $f(z) := \dfrac{1}{\sin(z)}$

**b)** $g(z) := \dfrac{1-\cos(z)}{\sin(z)}$

**c)** $h(z) := \exp\left(\dfrac{1}{\sin(z)}\right)$

**d)** $u(z) := \sin\left(\dfrac{1}{\exp(z)}\right)$

**e)** $v(z) := \dfrac{z^2(z-\pi)}{(1-e^{\mathrm{i}z})\sin(z)}$

**Aufgabe 4.3** Ein Körper befinde sich in einer reibungsfreien ebenen Potentialströmung. Er besitze eine typische Querschnittsfläche, welche durch ein $C^1$-berandetes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, beschrieben sei. Dann lässt sich die auf den Körper wirkende Kraft $F \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $F \in \mathbb{C}$) durch das (aus zwei Komponenten bestehende) reelle Kurvenintegral

$$F = -\oint_{\partial G} (p_0 - \tfrac{\rho}{2}\langle v(X), v(X)\rangle)\, n(X) + \rho\langle v(X), n(X)\rangle\, v(X)\, ds$$

berechnen. Hierbei beschreibt die Konstante $p_0 \in \mathbb{R}$ den Gesamtdruck, die Konstante $\rho \in \mathbb{R}$ die Dichte und das Vektorfeld $v = v_1 + iv_2 = \overline{\Phi'} : \mathbb{C} \setminus G \to \mathbb{C}$ die Geschwindigkeit der Strömung mit holomorphem Potential $\Phi : \mathbb{C} \setminus G \to \mathbb{C}$. Außerdem ist $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $n(X)$ der äußere Einheitsnormalenvektor in $X = (x, y)$ auf $\partial G$.

**a)** Zeigen Sie: Der Widerstand $F_1 = Re\, F$ und der Auftrieb $F_2 = Im\, F$ berechnen sich durch die Kurvenintegrale

$$F_1 = \frac{\rho}{2} \oint_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} 2v_1v_2 \\ v_2^2 - v_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F_2 = \frac{\rho}{2} \oint_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 \\ -2v_1v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie außerdem die Gültigkeit der Formel von Blasius

$$F = -i\, \frac{\rho}{2} \overline{\oint_{\partial G} \Phi'(z)^2\, dz}\,.$$

Hinweis: $n(x(t), y(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$

**b)** Zeigen Sie: Sei $0 \in G$ und $\bar{v}$ habe eine Laurent-Entwicklung der Form $\bar{v}(z) = v_\infty + aiz^{-1} + O(z^{-2})$ mit $a, v_\infty \in \mathbb{R}$, welche auf $R := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ mit $r \geq 0$ konvergiere, wobei $\partial G \subset R$ gelte. Dann gilt

$$\oint_{\partial G} \overline{v(z)}^{\,2}\, dz = -4\pi a v_\infty$$

und insbesondere $F_1 = 0$ (d'Alembertsches Paradoxon).

Anmerkung: Die Aufgabe ist mit rein mathematischen Methoden vollständig lösbar.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
**Dienstag, den 15.5.2018**
in der Vortragsübung besprochen.