

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 4

Aufgabe 4.1 a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2}$$

in Laurentreihen, die jeweils auf den folgenden Gebieten konvergieren:

- (i) $B_1(0) \setminus \{0\}$ (ii) $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ (iii) $B_2(i) \setminus \overline{B_1(i)}$ (iv) $B_1(i) \setminus \{i\}$

b) Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete der folgenden Laurentreihen.

- (i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n + 1}$ (iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 2}$
(ii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ (iv) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n$

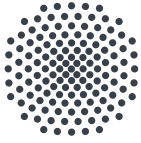
Aufgabe 4.2 Klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, welche alle auf $\mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z})$ definiert seien.

- a) $f(z) := \frac{1}{\sin(z)}$ d) $u(z) := \sin\left(\frac{1}{\exp(z)}\right)$
b) $g(z) := \frac{1 - \cos(z)}{\sin(z)}$ e) $v(z) := \frac{z^2(z - \pi)}{(1 - e^{iz}) \sin(z)}$
c) $h(z) := \exp\left(\frac{1}{\sin(z)}\right)$

Aufgabe 4.3 Ein Körper befinde sich in einer reibungsfreien ebenen Potentialströmung. Er besitze eine typische Querschnittsfläche, welche durch ein C^1 -berandetes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, beschrieben sei. Dann lässt sich die auf den Körper wirkende Kraft $F \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $F \in \mathbb{C}$) durch das (aus zwei Komponenten bestehende) reelle Kurvenintegral

$$F = - \oint_{\partial G} (p_0 - \frac{\rho}{2} \langle v(X), v(X) \rangle) n(X) + \rho \langle v(X), n(X) \rangle v(X) ds$$

berechnen. Hierbei beschreibt die Konstante $p_0 \in \mathbb{R}$ den Gesamtdruck, die Konstante $\rho \in \mathbb{R}$ die Dichte und das Vektorfeld $v = v_1 + iv_2 = \overline{\Phi'} : \mathbb{C} \setminus G \rightarrow \mathbb{C}$ die Geschwindigkeit



der Strömung mit holomorphem Potential $\Phi : \mathbb{C} \setminus G \rightarrow \mathbb{C}$. Außerdem ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $n(X)$ der äußere Einheitsnormalenvektor in $X = (x, y)$ auf ∂G .

- a) Zeigen Sie: Der Widerstand $F_1 = \operatorname{Re} F$ und der Auftrieb $F_2 = \operatorname{Im} F$ berechnen sich durch die Kurvenintegrale

$$F_1 = \frac{\rho}{2} \oint_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} 2v_1v_2 \\ v_2^2 - v_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle, \quad F_2 = \frac{\rho}{2} \oint_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 \\ -2v_1v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie außerdem die Gültigkeit der Formel von Blasius

$$F = -i \frac{\rho}{2} \oint_{\partial G} \overline{\Phi'(z)^2} dz.$$

Hinweis: $n(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$

- b) Zeigen Sie: Sei $0 \in G$ und \bar{v} habe eine Laurent-Entwicklung der Form $\bar{v}(z) = v_\infty + aiz^{-1} + O(z^{-2})$ mit $a, v_\infty \in \mathbb{R}$, welche auf $R := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ mit $r \geq 0$ konvergiere, wobei $\partial G \subset R$ gelte. Dann gilt

$$\oint_{\partial G} \overline{v(z)}^2 dz = -4\pi av_\infty$$

und insbesondere $F_1 = 0$ (d'Alembertsches Paradoxon).

Anmerkung: Die Aufgabe ist mit rein mathematischen Methoden vollständig lösbar.