Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ **ii)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,dx$ **iii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

Aufgabe 5.2 **a)** Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 6.2, Übungsblatt 6, um folgende Aussage (Satz von Rouché) zu beweisen:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit stückweisem C^1-Rand und f und h holomorph auf dem Abschluss von G. Außerdem sei $|h| < |f|$ auf dem Rand von G. Dann gilt $N(f) = N(f+h)$, wobei $N(f)$ bzw. $N(f+g)$ die Anzahl der Nullstellen der Funktion f bzw. $f+g$ im Gebiet G sei.

Hinweis: $f + h = f(1 + \frac{h}{f})$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$ in $|z| \leq 1$.

Aufgabe 5.3 **a)** Man zeige: Sei f holomorph in einer Umgebung von z_0. Sei $w_0 := f(z_0)$ und sei z_0 eine k-fache Nullstelle der Funktion $f(z) - w_0$. Dann existiert zu jedem $r > 0$ klein genug ein $\varepsilon > 0$, sodass die Gleichung $f(z) = w$ für jedes $w \in B_\varepsilon(w_0)\backslash\{w_0\}$ genau k einfache Lösungen in $B_r(z_0)$ hat.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\alpha z e^{1+z} = 1$$

genau eine Lösung in $B_1(0)$ besitzt.

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf G. Dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Anmerkung: Die Aussage wird als Satz von der Gebietstreue bezeichnet.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 29.5.2018
in der Vortragsübung besprochen.