Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Die borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wurde als die von den n-dimensionalen Figuren erzeugte σ-Algebra definiert. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ außerdem von den folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt wird.

a) $\mathcal{M}_1 = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ ist offen}\}$

b) $\mathcal{M}_2 = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist abgeschlossen}\}$

c) $\mathcal{M}_3 = \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ ist kompakt}\}$

d) $\mathcal{M}_4 = \left\{ \prod_{j=1}^n (-\infty, r_j] \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \right\}$

e) $\mathcal{M}_5 = \left\{ \prod_{j=1}^n (-\infty, r_j) \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 6.2 Die Cantormenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch den Schnitt

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \,, \qquad \mathcal{C}_{n+1} := \frac{1}{3}(\mathcal{C}_n \cup (2 + \mathcal{C}_n)) \,, \qquad \mathcal{C}_0 := [0,1] \,.$$

a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C}$ kompakt und überabzählbar ist.

b) Beweisen Sie, dass $\lambda^1(\mathcal{C}) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ist.

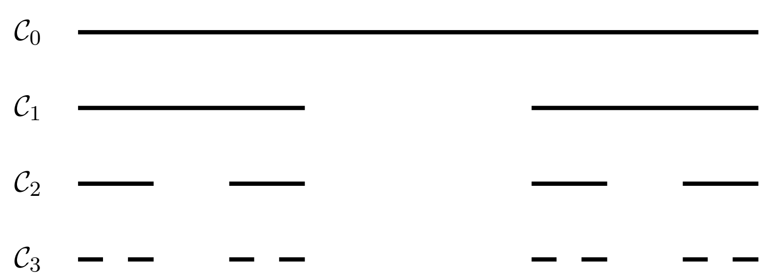

Abbildung 1: Die ersten Iterationen zur Bestimmung von $\mathcal{C}$

Aufgabe 6.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $\Sigma = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ oder $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(i) λ^n ist regulär von außen (auf Σ), d.h., es gilt:
$\forall A \in \Sigma : \lambda^n(A) = \inf\{\lambda^n(\mathcal{O}) : A \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \wedge \mathcal{O} \text{ offen}\}$,

(ii) λ^n ist regulär von innen (auf Σ), d.h., es gilt:
$\forall A \in \Sigma : \lambda^n(A) = \sup\{\lambda^n(\mathcal{K}) : \mathcal{K} \subseteq A \wedge \mathcal{K} \text{ kompakt}\}$.

b) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)})$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am

Dienstag, den 12.6.2018

in der Vortragsübung besprochen.