Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe 7.1 Sei (X, Σ) ein messbarer Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

a) Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

- **(i)** f ist Borel-messbar.
- **(ii)** $\forall r \in \mathbb{R} : \ f^{-1}([-\infty, r]) \in \Sigma$.
- **(iii)** $\forall r \in \mathbb{R} : \ f^{-1}([-\infty, r)) \in \Sigma$.
- **(iv)** $\forall r \in \mathbb{R} : \ f^{-1}([r, \infty]) \in \Sigma$.
- **(v)** $\forall r \in \mathbb{R} : \ f^{-1}((r, \infty]) \in \Sigma$.

b) Zeigen Sie: Ist f monoton, dann ist f auch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ messbar.

Aufgabe 7.2 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $f\colon X \to [0, \infty]$ Borel-messbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer einfacher Funktionen, sodass $f_n \uparrow f$ punktweise. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Aufgabe 7.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar, wobei sowohl das Riemann-Integral von f als auch das Lebesgue-Integral von f denselben Wert haben.

b) Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}_0^+$ Riemann-integrierbar oder uneigentlich Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar, wobei sowohl das Riemann-Integral bzw. das uneigentliche Riemann-Integral von f als auch das Lebesgue-Integral von f denselben Wert haben.

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 7.4 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $f : [a, b] \times X \to \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(t, x)$ messbar für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie:

a) Wenn $t \mapsto f(t, x)$ für jedes $x \in X$ stetig ist und ein integrierbares g existiert mit $|f(t, x)| \leq g(x)$ für alle $(t, x) \in [a, b] \times X$, dann ist

$$t \mapsto \int_X f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

stetig.

b) Wenn $f(t, \cdot)$ integrierbar ist für alle $t \in [a, b]$, die partielle Ableitung $\partial_t f(t, x)$ existiert für alle $(t, x) \in [a, b] \times X$, und ein integrierbares g existiert mit $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$ für alle $(t, x) \in [a, b] \times X$, dann ist

$$t \mapsto \int_X f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_X f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \partial_t f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am

Dienstag, den 19.6.2018

in der Vortragsübung besprochen.