

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 7

**Aufgabe 7.1** Sei  $(X, \Sigma)$  ein messbarer Raum und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion.

a) Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(i)  $f$  ist Borel-messbar.

(ii)  $\forall r \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, r]) \in \Sigma$ .

(iii)  $\forall r \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, r)) \in \Sigma$ .

(iv)  $\forall r \in \mathbb{R} : f^{-1}([r, \infty]) \in \Sigma$ .

(v)  $\forall r \in \mathbb{R} : f^{-1}((r, \infty]) \in \Sigma$ .

b) Zeigen Sie: Ist  $f$  monoton, dann ist  $f$  auch  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  messbar.

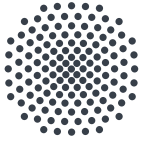
**Aufgabe 7.2** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  Borel-messbar und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nicht negativer einfacher Funktionen, sodass  $f_n \uparrow f$  punktweise. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Aufgabe 7.3** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei  $a, b \in \mathbb{R}$  sowie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar, wobei sowohl das Riemann-Integral von  $f$  als auch das Lebesgue-Integral von  $f$  denselben Wert haben.

b) Seien  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  Riemann-integrierbar oder uneigentlich Riemann-integrierbar. Dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar, wobei sowohl das Riemann-Integral bzw. das uneigentliche Riemann-Integral von  $f$  als auch das Lebesgue-Integral von  $f$  denselben Wert haben.



**Aufgabe 7.4** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \mapsto f(t, x)$  messbar für alle  $t \in [a, b]$ . Zeigen Sie:

- a) Wenn  $t \mapsto f(t, x)$  für jedes  $x \in X$  stetig ist und ein integrierbares  $g$  existiert mit  $|f(t, x)| \leq g(x)$  für alle  $(t, x) \in [a, b] \times X$ , dann ist

$$t \mapsto \int_X f(t, x) \, d\mu(x)$$

stetig.

- b) Wenn  $f(t, \cdot)$  integrierbar ist für alle  $t \in [a, b]$ , die partielle Ableitung  $\partial_t f(t, x)$  existiert für alle  $(t, x) \in [a, b] \times X$ , und ein integrierbares  $g$  existiert mit  $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$  für alle  $(t, x) \in [a, b] \times X$ , dann ist

$$t \mapsto \int_X f(t, x) \, d\mu(x)$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_X f(t, x) \, d\mu(x) = \int_X \partial_t f(t, x) \, d\mu(x)$$