Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n} \mathrm{e}^{k/2}\,.$$

existiert und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 8.2 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine μ-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$E \in \Sigma\,,\ \mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 8.3 Seien $-\infty < a < b < \infty$. Beweisen Sie die unten aufgeführten Aussagen. Verwenden Sie dafür die folgenden Lemmata ohne Beweis.

Lemma. *Jede monotone Funktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist fast überall differenzierbar. Jede absolutstetige Funktion auf $[a,b]$ ist Summe monotoner Funktionen.*

Lemma. *Ist $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutstetig, dann ist h fast überall differenzierbar. Ist außerdem $h'(x) = 0$ f.ü., dann ist h konstant.*

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist für jedes $\alpha \in [a,b]$ die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) \;=\; \int_\alpha^x f\, d\lambda^1$$

absolut stetig und λ^1-fast überall differenzierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$F' = f \ \text{ f.ü.}\,.$$

Ist zusätzlich f stetig in $y \in [a,b]$, dann ist F differenzierbar in y, falls $y \in (a,b)$, rechtsseitig differenzierbar in y, falls $y = a$ und linksseitig differenzierbar in y, falls $y = b$ ist, und es gilt $F'(y) = f(y)$.

b) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Dann ist F λ^1-fast überall differenzierbar auf $[a,b]$. Ist f die durch $f(x) = F'(x)$ für λ^1-fast alle $x \in [a,b]$ definierte und an allen anderen Stellen $x \in [a,b]$ durch 0 fortgesetzte Funktion, dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f\, d\lambda^1 \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Aufgabe 8.4 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$

b) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n})$

Aufgabe 8.5 Sei die Funktion $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq 0 \\ 0 & ,(x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass Fubini-Tonelli nicht im Widerspruch zu

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(y) \neq \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(y)\,\mathrm{d}\lambda^1(x)$$

steht.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am

Dienstag, den 26.6.2018

in der Vortragsübung besprochen.