

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n e^{k/2}.$$

existiert und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 8.2 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine μ -integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$E \in \Sigma, \mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

Aufgabe 8.3 Seien $-\infty < a < b < \infty$. Beweisen Sie die unten aufgeführten Aussagen. Verwenden Sie dafür die folgenden Lemmata ohne Beweis.

Lemma. *Jede monotone Funktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist fast überall differenzierbar. Jede absolutstetige Funktion auf $[a, b]$ ist Summe monotoner Funktionen.*

Lemma. *Ist $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutstetig, dann ist h fast überall differenzierbar. Ist außerdem $h'(x) = 0$ f.ü., dann ist h konstant.*

a) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist für jedes $\alpha \in [a, b]$ die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f d\lambda^1$$

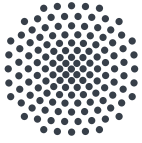
absolut stetig und λ^1 -fast überall differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$F' = f \text{ f.ü.}$$

Ist zusätzlich f stetig in $y \in [a, b]$, dann ist F differenzierbar in y , falls $y \in (a, b)$, rechtsseitig differenzierbar in y , falls $y = a$ und linksseitig differenzierbar in y , falls $y = b$ ist, und es gilt $F'(y) = f(y)$.

b) Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig. Dann ist F λ^1 -fast überall differenzierbar auf $[a, b]$. Ist f die durch $f(x) = F'(x)$ für λ^1 -fast alle $x \in [a, b]$ definierte und an allen anderen Stellen $x \in [a, b]$ durch 0 fortgesetzte Funktion, dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f d\lambda^1 = F(b) - F(a).$$



Aufgabe 8.4 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$
- b) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n})$

Aufgabe 8.5 Sei die Funktion $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass Fubini-Tonelli nicht im Widerspruch zu

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda^1(x) \, d\lambda^1(y) \neq \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda^1(y) \, d\lambda^1(x)$$

steht.