

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 9

Aufgabe 9.1 Sei (X, Σ, μ) ein σ -endlicher Maßraum, $p > 0$ und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \cdot \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) dt.$$

Aufgabe 9.2 Es seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, (X', Σ') ein messbarer Raum und $T: X \rightarrow X'$ messbar. Das *Bildmaß* von μ unter T ist durch

$$\mu'(E) = \mu(T^{-1}(E)), \quad E \in \Sigma',$$

definiert und (X', Σ', μ') ist ein Maßraum.

a) Sei $f: X' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Zeigen Sie, dass f genau dann μ' -integrierbar ist, wenn $f \circ T$ μ -integrierbar ist. Zeigen Sie außerdem, dass

$$\int_E f d\mu' = \int_{T^{-1}(E)} f \circ T d\mu, \quad E \in \Sigma',$$

falls $f \geq 0$ oder f integrierbar ist.

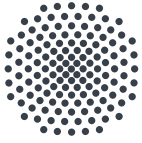
b) Seien $V, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Vergewissern Sie sich, dass der Transformationssatz äquivalent zu der Aussage $(\lambda^n)'_{|\det \Phi'|} = \lambda^n$ ist.

Hierbei bezeichnet $(\lambda^n)_{|\det \Phi'|}$ das zu λ^n gehörende Maß mit Dichte $|\det \Phi'|$ und $(\lambda^n)'_{|\det \Phi'|}$ das Bildmaß von $(\lambda^n)_{|\det \Phi'|}$ unter Φ .

Aufgabe 9.3 Beweisen Sie die *Teschebychevsche Ungleichung*:

Seien $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $\varepsilon > 0$ und $A = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$, dann

$$\mu(A) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\varepsilon^p}.$$



Aufgabe 9.4 a) Beweisen Sie den *Satz von Egorov*:

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall gegen Null konvergiert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $E \in \Sigma$, so dass $\mu(X \setminus E) \leq \varepsilon$ und die Folge (f_n) auf E gleichmäßig konvergiert.

b) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiert nach Maß gegen eine Funktion f , falls

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Zeigen Sie, dass für $f_n \rightarrow f$ punktweise fast überall, die Folge (f_n) auch nach Maß gegen f konvergiert.

Aufgabe 9.5 Sei (X, Σ, μ) ein σ -endlicher Maßraum, $f_k: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Folge integrierbarer Funktionen, so dass $f_k \rightarrow f$ punktweise fast überall.

a) Die Folge (f_k) habe weiterhin die Eigenschaften

(i) (*gleichgradige Integrierbarkeit*) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E |f_k| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

(ii) (*Straffheit*) Es gibt eine ein Folge $E_n \in \Sigma$ mit $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \uparrow X$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus E_n} |f_k| \, d\mu = 0.$$

Zeigen Sie, dass damit f integrierbar ist und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\mu = 0. \tag{1}$$

b) Beweisen Sie die Umkehrung. D.h. aus (1) folgen (i) und (ii).