Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 10

Aufgabe 10.1 **a)** Seien $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell^p \subseteq \ell^q$ und dass $\|a\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p}$ für alle $a \in \ell^p$. Zeigen Sie ferner, dass

$$\|a\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|a\|_{L^p}$$

für jedes a, das in einem ℓ^p für ein $p \in [1, \infty)$ enthalten ist.

b) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ genau dann gilt, wenn $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty)$ mit $\sup_{p\in[1,\infty)} \|f\|_{L^p} < \infty$. Zeigen Sie, dass auch in diesem Falle gilt:

$$\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \,.$$

Aufgabe 10.2 Beweisen Sie das *Fundamentallemma der Variationsrechnung*:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\lambda^n = 0$ für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$.

(ii) $\int_E f \,\mathrm{d}\lambda^n = 0$ für alle messbaren und beschränkten E mit $\overline{E} \subset \Omega$.

(iii) $f = 0$ fast überall.

Aufgabe 10.3 Beweisen Sie die *Poincaré-Ungleichung*:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die zwischen zwei parallelen Hyperebenen, die zueinander den Abstand d haben, liegt. Sei außerdem $u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$ mit $\partial_j u \in L^2(\Omega)$, für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt die Ungleichung

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|_{L^2} = \frac{d}{\sqrt{2}} \Big(\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^2}^2 \Big)^{1/2} .$$

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 10.7.2018
in der Vortragsübung besprochen.