Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vortragsübungsblatt 11

Aufgabe 11.1 Verwenden Sie die Theorie der Fourierreihen um den *Weierstraßschen Approximationssatz* zu beweisen:

Zu jeder auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ stetigen Funktion f existiert eine Folge von Polynomen p_n, so dass

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \to 0\,,\ n \to \infty\,.$$

Aufgabe 11.2 Sei zu $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \dfrac{x\cos(ax)}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $f \in L^2(\mathbb{R})$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von f mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 11.3 **a)** Sei $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, so dass $x \mapsto xg'(x)$ ebenfalls in $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} xg'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Sei nun $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit $\|f\|_{L^2} = 1$, so dass $x \mapsto xf(x)$ und f' ebenfalls in $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ sind. Beweisen Sie die *Heisenberg'sche Unschärferelation*:

$$\frac{1}{4} \le \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} k^2|\widehat{f}(k)|^2\,\mathrm{d}k\,.$$

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 17.7.2018
in der Vortragsübung besprochen.