

Höhere Analysis  
Vorlesung im Sommersemester 2018

## Vorbereitungsblatt zur Modulprüfung

**Vorbemerkung:** Die Gesamtlänge dieses Vorbereitungsblattes sowie die Anzahl der Aufgaben sind größer als die Gesamtlänge und die Anzahl der Aufgaben in der Modulprüfung.

**Aufgabe 1** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils.

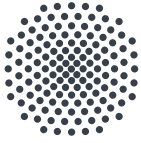
- a) Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann besitzt das Vektorfeld  $(\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)^T$  ein Potential.
- b) Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion, so ist  $f$  konstant.
- c) Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion, so besitzt  $f$  um  $z_0 = 0$  eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius  $r = \infty$ .
- d) Sind  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z \mapsto f(\bar{z})$  holomorph, so ist  $f$  konstant.

**Aufgabe 2** Berechnen Sie die folgenden Integrale

- a)  $\int_a \frac{2z}{\cos(z^2)^2} dz$  mit  $a: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto t + t^2i$
- b)  $\int_b \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$  mit  $b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto e^{it}$
- c)  $\oint_{|z-\pi|=2\pi} \frac{\cos(z) - 1}{z(z - 2\pi)^3} dz$
- d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x}{x^4 + 16} dx$
- e)  $\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 - 4 \cos(t)} dt$

**Aufgabe 3** Sei  $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ . Finden Sie eine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$



**Aufgabe 4** Sei  $g: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2}.$$

Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklungen von  $g$  um die Punkte  $z_0 = 0$  und  $z_0 = 1$ , und bestimmen Sie jeweils das Innere der Konvergenzgebiete.

**Aufgabe 5** a) Gegeben sei ein Gebiet  $G$  und eine holomorphe Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} g = \operatorname{Im} g$ . Zeigen Sie, dass  $g$  konstant ist.

b) Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz und  $\operatorname{Re} f(z) \leq C$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 6** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils.

a) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist  $f$  auch Borel-messbar.

b) Sei  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen mit punktweisem Grenzwert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

c) Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$  und  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^l$  offene Mengen und  $\phi: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus. Ist nun  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar, so folgt

$$\int_{\Omega} f d\lambda^n = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(\phi(x, y)) |\det \phi'(x, y)| d\lambda^l(y) \right) d\lambda^m(x).$$

d) Es existiert ein  $C > 0$ , so dass die Ungleichung

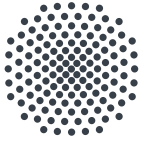
$$\|gf\|_{L^2} \leq C \|\widehat{g}\|_{L^1} \|f\|_{L^2}$$

für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt.

**Aufgabe 7** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{+x^2}, & x \in \mathbb{Q}, \\ e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Berechnen Sie  $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ .



**Aufgabe 8** Berechnen Sie:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{1 + nx^2} dx$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{1/n} \sin(x)}{x^2} dx$

*Hinweis:*  $x \geq \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$  für  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

**Aufgabe 9** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum und  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge messbarer Funktionen. Beweisen Sie, dass dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

gilt.

**Aufgabe 10** Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  messbar und  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\lambda \geq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{r}} d\lambda \right)^r \left( \int_{\mathbb{R}} |g|^{\frac{-1}{r-1}} d\lambda \right)^{-(r-1)}$$

für alle  $r > 1$  gilt.

*Hinweis:*  $f = (fg) \cdot \frac{1}{g}$