Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis
Vorlesung im Sommersemester 2018

Vorbereitungsblatt zur Modulprüfung

Vorbemerkung: Die Gesamtlänge dieses Vorbereitungsblattes sowie die Anzahl der Aufgaben sind größer als die Gesamtlänge und die Anzahl der Aufgaben in der Modulprüfung.

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils.

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann besitzt das Vektorfeld $(\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)^T$ ein Potential.

b) Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, so ist f konstant.

c) Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, so besitzt f um $z_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius $r = \infty$.

d) Sind $f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ und $z \mapsto f(\bar{z})$ holomorph, so ist f konstant.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_a \frac{2z}{\cos(z^2)^2}\,\mathrm{d}z$ mit $a\colon [-1,1] \to \mathbb{C}\colon t \mapsto t + t^2\mathrm{i}$

b) $\displaystyle\int_b \sin\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$ mit $b\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\colon t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

c) $\displaystyle\oint_{|z-\pi|=2\pi} \frac{\cos(z)-1}{z(z-2\pi)^3}\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{4}{5-4\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 3 Sei $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$, so dass

$$\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 4 Sei $g\colon \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}\,.$$

Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklungen von g um die Punkte $z_0 = 0$ und $z_0 = 1$, und bestimmen Sie jeweils das Innere der Konvergenzgebiete.

Aufgabe 5 **a)** Gegeben sei ein Gebiet G und eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} g = \operatorname{Im} g$. Zeigen Sie, dass g konstant ist.

b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und $\operatorname{Re} f(z) \le C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 6 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils.

a) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f auch Borel-messbar.

b) Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen mit punktweisem Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda\,.$$

c) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^l$ offene Mengen und $\phi\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega$ ein Diffeomorphismus. Ist nun $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar, so folgt

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\phi(x,y)) |\det \phi'(x,y)| \,\mathrm{d}\lambda^l(y) \right) \mathrm{d}\lambda^m(x)\,.$$

d) Es existiert ein $C > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|gf\|_{L^2} \le C \|\widehat{g}\|_{L^1} \|f\|_{L^2}$$

für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 7 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{+x^2}, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ \mathrm{e}^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$.

Aufgabe 8 Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{1/n}\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

Hinweis: $x \geq \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 9 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n\colon X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Beweisen Sie, dass dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

gilt.

Aufgabe 10 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| \mathrm{d}\lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{\frac{1}{r}} \mathrm{d}\lambda\right)^r \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{\frac{-1}{r-1}} \mathrm{d}\lambda\right)^{-(r-1)}$$

für alle $r > 1$ gilt.

Hinweis: $f = (fg) \cdot \frac{1}{g}$