Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

1. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich" gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen.

1.1. Schriftlich: (a)-(d) – 9 Punkte.

Sei K ein Körper. Aus Linearer Algebra I kennen Sie den größten gemeinsamen Teiler von ganzen Zahlen, sowie den Euklidischen Algorithmus, also wiederholte Division mit Rest, und das Lemma von Bezout. Entwickeln Sie eine analoge Theorie für den Polynomring $K[X]$:

(a) Definieren Sie den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome $f, g \in K[X]$, und erklären Sie gegebenfalls, warum dieser wohldefiniert ist.

(b) Definieren Sie den Euklidischen Algorithmus für zwei Polynome $f, g \in K[X]$. Was berechnet der Euklidische Algorithmus? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(c) Gilt im Polynomring $K[X]$ das Lemma von Bezout, das heißt, gibt es zu jedem $f, g \in K[X]$ Polynome $s, t \in K[X]$ mit

$$\mathrm{ggT}(f, g) = s \cdot f + t \cdot g?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler von

i. $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$ und $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$;

ii. $p = 1/2(X^2 - 4X + 3)$ und $q = 2X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$.

1.2. Seien R und S zwei Ringe, $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $f, g \in R[X]$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Wenn R kommutativ ist, dann gilt die Aussage in Theorem 1.17 (Division mit Rest) auch für Polynome f und g in $R[X]$.

(b) Sei R kommutativ und $a \in R$ eine Nullstelle von f. Dann existiert $q \in R[X]$ mit $f = (X - a)q$.

(c) Sei p ein Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ mit $p(0)$ und $p(1)$ ungerade. Dann hat p keine ganzen Nullstellen, also keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$.

(d) Wenn S ein Integritätsbereich und ϕ injektiv ist, dann ist R auch ein Integritätsbereich.

(e) Wenn S ein Körper ist, dann ist ϕ injektiv.

Abgabe: 27. April 2020, spätestens 10 Uhr, in den Übungsgruppen in Ilias.