Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

2. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen.

2.1. Schriftlich: (a)-(d) – 8 Punkte. Sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $A \in M_n(K)$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Seien $A, B \in M_n(K)$, β ein Eigenwert von A und $V_\beta = \{v \in K^n | Av = \beta v\}$ der zugehörige Eigenraum. Nehmen wir an, $AB = BA$. Beweisen Sie, dass $BV_\beta \subseteq V_\beta$ gilt.

(c) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $AB = BA$. Beweisen Sie, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor haben.

(d) Sei $K_n[X] := \{p \in K[X] | \deg(p) \leq n\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Weiter bezeichne $f_{a,b}$ die lineare Abbildung $f_{a,b} : K_n[X] \to K_n[X] : p \mapsto p(aX+b)$, also die Auswertung eines Polynoms p in $aX + b$, wobei $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ seien. Berechnen Sie alle Eigenwerte von $f_{a,b}$.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei R ein kommutativer Ring (mit Eins 1_R) und $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^\times$ eine Einheit ist.

Wir betrachten die lineare Abbildung $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^T$.

(b) Die Abbildung L hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

(c) Es gibt eine Basis von $M_n(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von L.

Wir betrachten die Ableitungsabbildung $\partial : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] : p = \sum_{i\geq 0} a_i X^i \mapsto \partial p := \sum_{i\geq 1} i a_i X^{i-1}$.

(d) Diese ist ein Endomorphismus von Vektorräumen und besitzt zwei verschiedene Eigenwerte.

(e) Der Vektorraumendomorphismus ∂ besitzt zwei lineare unabhängige Eigenvektoren.