Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

3. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen.

3.1. Schriftlich: (a)-(e) – 10 Punkte. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei V ein K-Vektorraum. Wir betrachten eine lineare Abbildung $S : V \to V$, sodass $S^2 = id_V$, wobei id_V die Identitätsabbildung bezeichnet.

(a) Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von S entweder gleich 1 oder gleich -1 sind.

(b) Beweisen Sie, dass $V = U \oplus W$ gilt, wobei $U = \mathrm{Eig}(S, 1)$ und $W = \mathrm{Eig}(S, -1)$.
(*Hinweis:* Für jedes $v \in V$ gilt $v = 1/2 \cdot (v + S(v)) + 1/2 \cdot (v - S(v))$).

(c) Sei V nun zusätzlich endlich-dimensional mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass es eine Basis von V gibt, bezüglich derer die darstellende Matrix von S die Form

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $0 \leq r \leq n$ und I_r bzw. I_{n-r} die Identitätsmatrix ist.

Sei K nun ein beliebiger Körper und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

(d) Sei $n > 1$. Wir betrachten das Minimalpolynom μ_T einer linearen Abbildung $T : V \to V$ mit Rang 1. Beweisen Sie, dass für dessen Grad $\deg(\mu_T) = 2$ gilt.

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $A \in M_n(K)$ eine Matrix. Sei weiter $f = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom mit $a_0 \neq 0$ und $f(A) = 0$. Beweisen Sie, dass A invertierbar ist mit $A^{-1} = -1/a_0 \cdot (\sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1})$.

3.2. Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A, B \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Alle Vektoren $0 \neq v \in V$ sind genau dann Eigenvektoren von A, wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass die Matrizen A und λI_n ähnlich sind.

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, dann gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass χ_A ein Teiler von μ_A^m in $\mathbb{C}[X]$ ist, wobei μ_A das Minimalpolynom von A bezeichnet.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und nehmen wir an, dass A genau n paarweise verschiedene, positive Eigenwerte hat. Dann gibt es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$, sodass $B^2 = A$ gilt.

(d) Es gibt eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, die keine Eigenwerte hat.