Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

4. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen.

4.1. Schriftlich: (a)-(d) – 9 Punkte. Sei K ein Körper. Seien V_1, V_2 zwei K-Vektorräume, und $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$ zwei Untervektorräume.

(a) Sei $T : V_1 \to V_2$ linear mit $T(U_1) \subseteq U_2$. Beweisen Sie, dass $\overline{T} : V_1/U_1 \to V_2/U_2$, gegeben durch $v + U_1 \mapsto T(v) + U_2$, wohldefiniert und linear ist; siehe Lemma 3.7.

(b) Sei $\pi : V_1 \to V_1/U_1$ die Projektion gegeben durch $v \mapsto v + U_1$, sei $T : V_1 \to V_2$ linear mit $T(U_1) = 0$. Beweisen Sie, dass π linear ist und es eine eindeutige lineare Abbildung $Q : V_1/U_1 \to V_2$ gibt mit $Q \circ \pi = T$.

Sei $V = K[X]$, sei $W_0 \leq V$ der Unterraum der geraden Polynome (d.h es kommen nur gerade Exponenten vor) und $W_1 \leq V$ der Unterraum der ungeraden Polynome (d.h es kommen nur ungerade Exponenten vor), siehe Beispiel 3.5 in der Vorlesung. Sei weiterhin $T : V \to V$ die Abbildung gegeben durch $f(X) \mapsto f(-X)$ für $f \in V$.

(c) Zeigen Sie, dass $V = W_0 \oplus W_1$ eine Zerlegung von V als direkte Summe T-invarianter Unterräume ist.

(d) Bestimmen Sie die (nach Lemma 3.7) zu T gehörige lineare Abbildung $\overline{T} : V/W_0 \to V/W_0$, und beweisen Sie, dass $V/W_0 \simeq W_1$ ist.

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $W := \{p \in K[X] : (X^n + 1) \mid p\} \leq V$. Ist V/W endlichdimensional? Begründen Sie Ihre Antwort. Hierbei bedeutet $(X^n + 1) \mid p$, dass das Polynom $X^n + 1$ das Polynom p in $K[X]$ teilt.

4.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sei $\mathcal{E}_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{E}_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definiert wie üblich durch $x \mapsto Ax$, sei $U_i = \operatorname{Span}\{v_i\}$ für $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist $T_A(U_1) \subseteq U_2$.

(b) Es ist $D = \{e_1 + U_1, e_2 + U_1, e_3 + U_1\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4/U_1$.

(c) Die darstellende Matrix von $\overline{T}_A : \mathbb{R}^4/U_1 \to \mathbb{R}^3/U_2$ bezüglich der Basen $B = \{e_2 + U_1, e_3 + U_1, e_4 + U_1\}$ und $C = \{f_1 + U_2, f_2 + U_2\}$ ist

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -10/11 & -19/11 & 32/11 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

(d) Sei T invertierbar. Dann ist W ein T-invarianter Unterrraum von V genau dann, wenn W ein T^{-1}-invarianter Unterrraum von V ist.

(e) Sei χ_T das charakteristische Polynom von T. Wenn χ_T irreduzibel ist, so gibt es keine T-invarianten Unterräume von V außer 0 und V.