Arne Geyer, Anne Henke, Alexandra Zvonareva

5. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen.

5.1. Schriftlich: (a)-(d) – 10 Punkte. Seien $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ drei Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für A, B und C jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

(b) Welche von den Matrizen A, B und C sind diagonalisierbar? Welche von den Matrizen A, B und C sind trigonalisierbar?

(c) Für die Matrix C, jetzt als eine Matrix aus $M_4(\mathbb{C})$ betrachtet, bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^4$, so dass $M_{\mathcal{B}}(T_C)$ obere Dreiecksform hat. Finden Sie eine Matrix P, sodass $M_{\mathcal{B}}(T_C) = P^{-1}CP$, und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

(d) Seien K ein Körper, $A \in M_n(K)$ eine Diagonalmatrix mit $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, wobei $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Bestimmen Sie alle A-invarianten Unterräume von K^n.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

5.2. Seien K ein Körper, V, V_1, V_2 drei K-Vektorräume und $A, B \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Wenn $V \oplus V_1 \simeq V \oplus V_2$, dann ist $V_1 \simeq V_2$. Was können Sie über den Fall sagen, wenn V, V_1, V_2 endlichdimentional sind?

(b) Sei $C \in M_{2n}(K)$ eine Blockmatrix mit A und B auf der Diagonal und 0 anderswo, dann $m_C = \operatorname{kgV}(m_A, m_B)$, wobei $\operatorname{kgV}(m_A, m_B)$ das kleinste gemeinsame Vielfache in $K[X]$ kennzeichnet.
Erinnerung. Das kleinste gemeinsame Vielfache $\operatorname{kgV}(p(x), q(x))$ von zwei Polynome $p(x), q(x) \in K[X]$ ist ein Polynom $s(x)$ minimalen Grades, sodass Zerlegungen $s(x) = p(x)h(x)$ und $s(x) = q(x)g(x)$ existieren für einige $h(x), g(x) \in K[X]$ und der Leitkoeffizent von $s(x)$ gleich 1 ist.

(c) Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Wenn $A^3v = Av$ für alle $v \in V$, dann ist A diagonalisierbar. Was können Sie über den Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ sagen?

(d) Seien $K = \mathbb{C}$ und $AB = BA$, dann gibt es $P \in M_n(\mathbb{C})$, sodass sowohl $P^{-1}AP$ als auch $P^{-1}BP$ obere Dreiecksmatrizen sind.

(e) Sei $J_n(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ ein Jordanblock mit $n > 1$, dann gibt es unendlich viele $J_n(\lambda)$-invariante Unterräume von $\mathbb{C}^n$.

5.3. Schriftlich: (a)-(d) – 8 Punkte. Bonusaufgabe.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ einen A-invarianten Unterraum der Dimension 1 oder der Dimension 2 besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $M_{\mathcal{B}}(T_A)$ die folgende Form hat:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{H_1} & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \boxed{H_2} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \boxed{H_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & \cdots & 0 & \boxed{H_j} \end{bmatrix},$$

wobei entweder $H_i \in M_2(\mathbb{R})$ oder $H_i \in M_1(\mathbb{R})$, für $1 \leq i \leq j$.

Sei X eine Menge, $|X| = 4$. Sei $P(X)$ die Potenzmenge der Menge X (d.h. die Menge aller Teilmengen von X). Für $A, B \in P(X)$ definieren wir die symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Nach LAAGI Blatt 6, Aufgabe 6.5 ist die Menge $P(X)$ mit Δ als Addition und $1A = A, 0A = \emptyset$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum.

(c) Hat $P(X)$ eine Basis, die aus i-elementigen Teilmengen besteht für $i = 1, 2, 3, 4$?

(d) Bezeichnen wir als V_4 den Unterraum von $P(X)$, der durch alle 4-elementigen Teilmengen von X erzeugt wird. Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{Z}_2} P(X)/V_4$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen, die den Elementen von $P(X)/V_4$ entsprechen.