Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

6. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen. Die Musterlösung der schriftlichen Hausaufgaben wird Freitags veröffentlicht.

6.1. Schriftlich: (a)-(c) – 10 Punkte. Seien $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ zwei Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

(a) Berechnen Sie für A und B die Jordansche Normalform A_J und B_J und die Matrizen P_A und P_B, sodass $P_A^{-1}AP_A = A_J$ und $P_B^{-1}BP_B = B_J$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

(b) Sei $C \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix in Jordanscher Normalform. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von C^2.

(c) Seien $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $V := \{B \in M_n(\mathbb{C}) | AB = BA\}$. Beweisen Sie, dass der Unterraum $V \leq M_n(\mathbb{C})$ der Dimension $\geq n$ ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

6.2. Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Wenn $\chi_A = x^4(x-1)^3(x-2)^2$ und $m_A = x^3(x-1)^2(x-2)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

(b) Wenn $\chi_A = x^6(x-1)^2$ und $m_A = x^2(x-1)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

(c) Wenn $\mathrm{Im}A = \mathrm{Ker}A$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

(d) A ist genau dann nilpotent, wenn alle Eigenwerte von A gleich 0 sind.

(e) A und A^T sind immer ähnlich.

(f) Es gibt eine diagonalisierbare Matrix D und eine nilpotente Matrix N, sodass $A = D + N$ gilt.