Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

7. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen. Die Musterlösung der schriftlichen Hausaufgaben wird Freitags veröffentlicht.

7.1. Schriftlich: (a)-(c) – 10 Punkte. Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und U ein Unterraum von V. Mit V^* bezeichnen wir der Dualraum zu V, mit U° den orthogonale Raum zu U.

(a) Berechnen Sie eine Jordan-Normalform A_J und eine Matrix P mit $P^{-1}AP = A_J$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{10}(\mathbb{C}).$$

[*Hinweis: Matrix A hat die Eigenwerte* 1 *und* 2.]

(b) Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie die Vektoren der Dualbasis zu

$$\{(1,0,0)^T, (1,-1,1)^T, (2,-4,7)^T\}$$

als Linearkombinationen von e_1^*, e_2^* und e_3^* dar. Bestimmen Sie $\mathrm{Span}\{(1,-1,1)\}^\circ$.

(c) Seien $V = \mathbb{R}_2[X]$ und $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V^*$ definiert durch

$$\phi_1(f) = \int_0^1 f(t)dt, \quad \phi_2(f) = f'(1) \quad \text{und} \quad \phi_3(f) = f(0),$$

mit f' erste Ableitung von f. Wir identifizieren V und V^{**} mittels Abbildung ι aus Theorem 5.11.

(i) Bestimmen Sie die Dualbasis zu $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

(ii) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von $1, X, X^2 \in V^{**}$ bezüglich der Basis $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

7.2. Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem Körper K. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei V Vektorraum der Dimension n. Für alle $0 \neq f \in V^*$ existiert eine Basis $\{h_1, \ldots, h_n\}$ von V, sodass $f(x_1h_1 + \ldots + x_nh_n) = x_1$.

(b) Es gibt einen Vektorraum V und Funktionale $0 \neq f_1, 0 \neq f_2 \in V^*$, sodass $f_1(v)f_2(v) = 0$, für alle $v \in V$.

(c) Seien $f_1, f_2 \in V^*$ mit $\mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$, dann existiert $c \in K$, derart dass $f_1 = cf_2$.

(d) Seien $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. Dann ist $\mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_k\} = V^*$, genau dann, wenn $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i) = 0$.
Was können Sie über die Situation sagen, wenn V unendlich-dimensional ist?

(e) Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ definieren wir $M^\circ = \{f \in V^* \mid f(m) = 0 \text{ für alle } m \in M\}$.
Ist M° ein Unterraum von V^*? Gilt $\mathrm{Span}(M)^\circ = M^\circ$? Gilt $\mathrm{Span}(M)^\circ = \mathrm{Span}(M^\circ)$?