Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

8. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen. Die Musterlösung der schriftlichen Hausaufgaben wird Freitags veröffentlicht.

8.1. Schriftlich: (a)-(d) – 10 Punkte. Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Beweisen Sie, dass Vektoren $e_1, \ldots, e_k$ linear unabhängig sind dann und genau dann, wenn es $f_1, \ldots, f_k \in V^*$ gibt derart, dass $\det(A) \neq 0$ mit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} := (f_i(e_j))_{1 \leq i,j \leq k}$.

(b) Sei $V = M_{n \times m}(K), f \in V^*$. Beweisen Sie, dass es eine Matrix $P \in V$ gibt mit $f(A) = \mathrm{Sp}(P^T A)$ für alle Matrizen $A \in V$.

(c) Berechnen Sie die Anzahl von Äquivalenzklassen von Matrizen $A \in M_6(\mathbb{R})$ mit $m_A = X^4 + 3X^2 + 2$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Sei

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & 7 & -8 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{Q})$$

Bestimmen Sie eine Frobenius Normalform A_F zu A und eine Matrix P, sodass $P^{-1}AP = A_F$. Überprüfen Sie ihre Antwort.

8.2. Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\dim_K V = n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Jeder Unterraum $U \leq V$ mit $\dim_K U = k$ ist ein Schnitt von Kernen von $n - k$ linearen Funktionalen.

(b) Seien K unendlich (d.h. K besitzt unendlich viele Elemente) und $U_i \leq V$ Unterräume für $1 \leq i \leq m$. Die Gleichung $V = \bigcup_{i=1}^m U_i$ ergibt $U_j = V$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$.

(c) Sei K unendlich. Für alle $x_1, \ldots, x_l \in V \backslash \{0\}$ gibt es ein $f \in V^*$ derart, dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq l$.

(d) Es gibt einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V und einen Unterraum U von V, sodass $\mathrm{End}_K(V/U) \not\cong \mathrm{End}(\mathrm{U}^\circ)$.

(e) Sei $T : V \to V$. Die Frobenius Normalform von T aus Korollar 5.42 ist bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmt.